Exercice 1

On définit :

- la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\cdot u_n + \dfrac{4}{5} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

- la suite (S_n), pour tout entier naturel n, par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$.

   En déduire la limite de la suite (u_n).

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

   b. Calculer S_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Correction 1

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par : $\mathcal{P}_n$: "$u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :**
     On a :
     $$u_0 = 13 \quad ; \quad 1 + \frac{12}{5^0} = 1 + \frac{12}{1} = 13$$
     Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   - **Hérédité :**
     Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
     $$u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$$
     Par la définition de la suite (u_n), on a la relation :
     $$u_{n+1} = \frac{1}{5}\cdot u_n + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\cdot\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5}$$
     $$= \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} + \frac{4}{5} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$$
     La relation précédente montre que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   - **Conclusion :**
     La propriété est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. Le raisonnement par récurrence montre que cette propriété pour tout entier naturel n.

2. a. On a :

$$S_{n+1} - S_n = \left(u_0 + \cdots + u_n + u_{n+1}\right) - \left(u_0 + \cdots + u_n\right)$$
$$= u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^n} > 0$$

La suite (S_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. La somme S_n admet l'écriture suivante :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$
$$= \left(1 + \frac{12}{5^0}\right) + \left(1 + \frac{12}{5^1}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{12}{5^{n-1}}\right) + \left(1 + \frac{12}{5^n}\right)$$
$$= \underset{n+1}{\cancel{1\times n}} + \frac{12}{5^0} + \frac{12}{5^1} + \cdots + \frac{12}{5^{n-1}} + \frac{12}{5^n}$$
$$= \underset{n+1}{\cancel{n}} + \underbrace{12\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0 + 12\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^1 + \cdots + 12\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}_{S'_n}$$

La suite S'_n est la somme des termes de la suite géométrique de premier terme 12 et de raison $\dfrac{1}{5}$; ainsi, S'_n a pour valeur :

$$S'_n = 12\cdot\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\overset{n+1}{\cancel{n}}}}{1 - \frac{1}{5}} = 12\cdot\frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\overset{n+1}{\cancel{n}}}}{\frac{4}{5}}$$
$$= \frac{5}{4}\times 12\cdot\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\overset{n+1}{\cancel{n}}}\right] = 15\cdot\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\overset{n+1}{\cancel{n}}}\right]$$

Ainsi, la somme S_n admet pour écriture :

$$S_n = \underset{n+1}{\cancel{n}} + 15\cdot\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\overset{n+1}{\cancel{n}}}\right]$$

c. On a l'encadrement $0 < \dfrac{1}{5} < 1$ qui permet d'obtenir la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$

Ainsi, la suite (S_n) admet la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = \lim_{n\mapsto+\infty} \overset{n+1}{\cancel{n}} + 15\cdot\left[1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{\overset{n+1}{\cancel{n}}}\right] = +\infty$$