Tle spé

LIMITE D'UNE SUITE
7 EXERCICES POUR RÉVISER

Les corrections sont disponibles ici : https://www.mathemathieu.fr/tsm-ls-7exorev-cor.

EXERCICE 1

En 2005, un éleveur de vaches laitières commercialisait 80 mètres cubes de lait.

Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société a été signé : il prévoit que cette quantité doit être réduite de 5 % par an, jusqu'en 2020.

On note u_n le nombre de litres de lait commercialisés durant l'année $2005+n$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n=80\,000\times 0{,}95^n$.

2. Combien de litres de lait devront être commercialisés en 2020 ? *Arrondira au litre entier le plus proche.*

3. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2005 et l'année 2020 (incluses) ?

On arrondira au nombre entier de litres le plus proche.

EXERCICE 2

On cherche à savoir à quel nombre est égal $0{,}777\,...$ avec une infinité de 7.

On note $v_n=0{,}777\,...$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi on a : $v_1=0{,}7$, $v_2=0{,}77$, $v_3=0{,}777$, etc.

1. a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$. *Aide* : $\dfrac{1}{10^k}=\left(\dfrac{1}{10}\right)^k$.

b) En remarquant que $v_n=0,\underbrace{777\,...\,7}_{n\text{ chiffres}}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{7}{10^k}$, en déduire v_n .

2. Lorsque n tend vers l'infini, l'expression 10^n est de plus en plus grande : elle tend aussi vers l'infini.

Vers quelle valeur devrait tendre v_n lorsque n tend vers l'infini ?

Conclure : 0,777… = ?

EXERCICE 3

Étudier le sens de variations de la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{2^n}{n+1}$.

EXERCICE 4

1. Étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^2$.

2. Calculer la somme suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{97}(5k-3)$.

EXERCICE 5

On donne la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+1$.

1. a) A l'aide de la calculatrice, observer les 10 premiers termes de la suite (u_n).
En donner des valeurs approchées au centième, sans justifier.

b) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n).

Nous allons démontrer cette conjecture.

2. Première méthode

Pour tout entier naturel *n*, on pose : $v_n=u_n-\frac{3}{2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

b) Déterminer les variations de la suite (v_n).

c) En déduire celles de la suite (u_n).

3. Deuxième méthode

a) Démontrer que : $u_{n+1}\leqslant u_n \Leftrightarrow u_n\geqslant\frac{3}{2}$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n\geqslant\frac{3}{2}$.

c) En déduire les variations de (u_n).

EXERCICE 6

Voici les données la population française que j'ai obtenues sur le site de l'INSEE :

> « Au 1er janvier 2015, 66,318 millions d'habitants résident en France »
>
> « La population de la France compte 300 000 personnes de plus soit + 0,4 % sur l'année 2014. »
>
> « En 2013, 332 000 personnes sont entrées en France et 299 000 en sont sorties, soit un solde migratoire évalué à 33 000 personnes. »

On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.

On note u_n la population de l'année $2015+n$ exprimée en milliers d'habitants.

On a donc $u_0=66\,318$ et $u_{n+1}=1{,}004\,u_n+33$.

1. À l'aide de la calculatrice (expliquer votre démarche), conjecturer le nombre d'habitants en France en 2025. En donner une valeur approchée au millier d'habitants près.

2. Pour tout entier naturel *n*, on pose : $v_n=u_n+8\,250$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

b) En déduire u_n en fonction de n, et en déduire une prévision du nombre d'habitants en France en 2060[1].

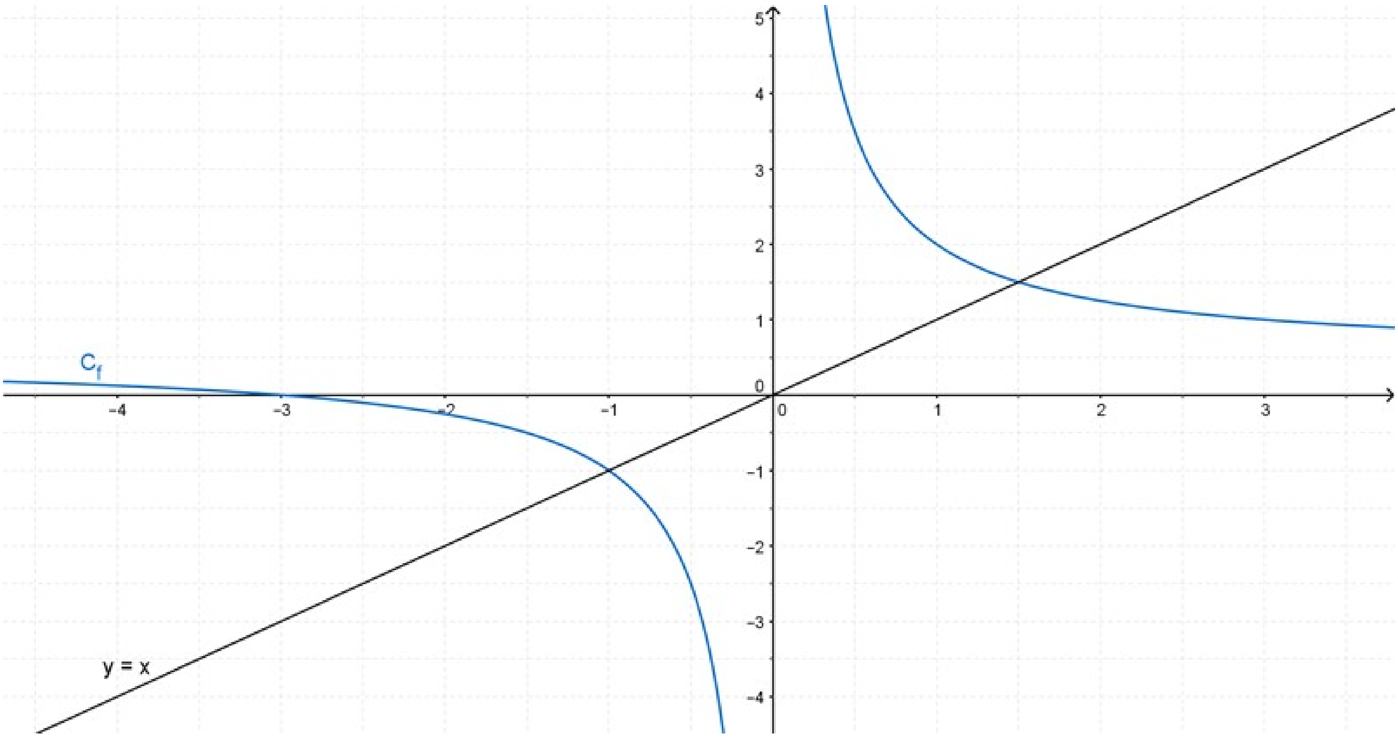
1 En octobre 2010 puis en janvier 2016, l'INSEE écrivait :
Au 1er janvier 2016, la France compte 66,6 millions d'habitants. Les habitants âgés d'au moins 65 ans représentent 18,8 % de la population, soit une progression de 3,7 points en 20 ans. Les habitants âgés de 20 à 59 ans représentent un peu plus de la moitié de la population, soit une baisse de 3,2 points en vingt ans.
Si les tendances démographiques récentes se maintiennent, la France métropolitaine comptera 73,6 millions d'habitants au 1er janvier 2060, soit 11,8 millions de plus qu'en 2007. Le nombre de personnes de plus de 60 ans augmentera, à lui seul, de plus de 10 millions. En 2060, une personne sur trois aura ainsi plus de 60 ans.

EXERCICE 7

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On note également f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{x+3}{2x}$.

1. Ci-contre est tracé la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=x$.
Représenter graphiquement les 7 premiers termes de la suite (u_n) : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
Laisser les traits de construction.



2. a) Calculer u_1 et u_2.
b) (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n-\frac{3}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{2}$.

b) En déduire que : $v_n=\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.

c) Utilisez ce résultat pour trouver l'expression de u_n en fonction de n.