LIMITES DE FONCTIONS : 4 EXERCICES CORRIGÉS

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}+x$ **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+\dfrac{1}{4x-5}$ **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{3x^4+2x-6}$

a. Par quotient de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0^+}$.

b. Par produit de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$.

D'où, par quotient de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}=0^+$.

Par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}+x=-\infty}$.

c. • Par produits de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

• Par produit et différence de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x-5=+\infty$.

Donc, par quotient de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4x-5}=0^+$.

• Par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+\dfrac{1}{4x-5}=+\infty}$.

d. Par produits de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$.

Donc, par produits et sommes de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^4+2x-6=+\infty$.

Par quotient de limites : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{3x^4+2x-6}=0^+}$.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{x\to3} \sqrt{\dfrac{2x}{5-x^2}}$ **b.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1}{\sin x}$ **c.** $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x+|x|}{2}$ **d.** $\lim\limits_{x\to-100} x(x+100)$ **e.** $\lim\limits_{x\to0} \left(3x^2-4x+3\right)$

a. La fonction dont on cherche la limite en 3 est définie (à faire) sur $]-\infty;-\sqrt{5}[\cup[0;\sqrt{5}[$: cet intervalle ne contient pas 3, donc cette limite n'existe pas !
En -3, cela aurait un sens (erreur du manuel ?) :

$\lim\limits_{x\to-3} 5-x^2=5-(-3)^2=-4$ et $\lim\limits_{x\to-3} 2x=-6$

donc, par quotient de limites : $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{2x}{5-x^2}=\dfrac{-6}{-4}=\dfrac{3}{2}$.

Or, $\lim\limits_{X\to\frac{3}{2}} \sqrt{X}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ donc, par composition de limites : $\lim\limits_{x\to-3} \sqrt{\dfrac{2x}{5-x^2}}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

$\longrightarrow$

b. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc, par quotient de limites : $\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}}$.

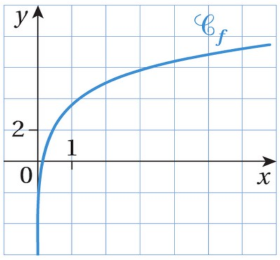
c. $\lim_{x \to -1} |x| = |-1| = 1$ donc, par somme et quotient de limites : $\boxed{\lim_{x \to -1} \frac{x+|x|}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0}$.

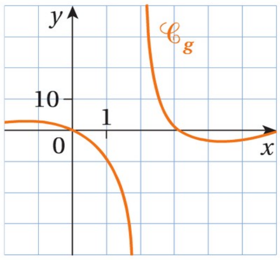
d. À faire (produit de limites) : $\boxed{\lim_{x \to -100} x(x+100) = 0}$.

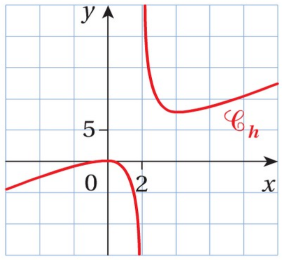
e. À faire (produits et sommes...) : $\boxed{\lim_{x \to 0} 3x^2 - 4x + 3 = 3}$.

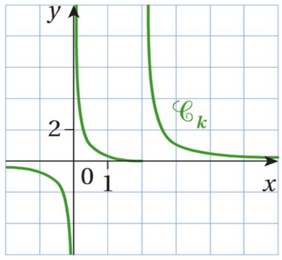
EXERCICE 3

À l'aide d'une lecture graphique, conjecturer, si elles existent, les limites à gauche et à droite en 0, puis en 2.

a. 

b. 

c. 

d. 

a.
- La fonction ne semble pas définie « à gauche de 0 », donc pas de limite.
- À « droite de 0 » : $\lim_{x \to 0, x>0} f(x) = -2$.
- $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

b.
- $\lim_{x \to 0, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} f(x) = 0$, autrement dit $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
- $\lim_{x \to 2, x<2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 2, x>2} f(x) = +\infty$.

c.
- $\lim_{x \to 0, x<0} f(x) = \lim_{x \to 0, x>0} f(x) = 0$, autrement dit $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
- $\lim_{x \to 2, x<2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 2, x>2} f(x) = +\infty$.

d.
- $\lim_{x \to 0, x<0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0, x>0} f(x) = +\infty$.
- $\lim_{x \to 2, x<2} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to 2, x>2} f(x) = +\infty$.

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie sur $D_f =]-\infty\,;\,2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x+2}{3x-6}$.

1. a. Étudier le signe de f sur $]-\infty\,;\,2[$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)$.

c. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

2. Déterminer les limites en l'infini de $f(x)$, puis donner une interprétation graphique de ce résultat.

3. Étudier le signe de $f(x)-\dfrac{1}{3}$ puis donner une interprétation graphique de ce résultat.

1. a. Sur $]-\infty;2[$:

x	$-\infty$		-2		2
$x+2$		$-$	0	$+$	‖
$3x-6$		$-$	$\vdots$	$-$	‖
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖

b. $\lim\limits_{x\to 2,\, x<2} x+2=4$ et $\lim\limits_{x\to 2,\, x<2} 3x-6=0^-$ donc, par quotient de limites : $\underline{\lim\limits_{x\to 2,\, x<2} f(x)=-\infty}$.

c. La droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f.

2. Pour tout réel x de D_f tel que $x\neq 0$: $\dfrac{x+2}{3x-6}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(3-\dfrac{6}{x}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{3-\dfrac{6}{x}}$.

Or, $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6}{x}=0^-$ donc, par sommes et quotient de limites : $\underline{\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}}$.

De même : $\underline{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}}$.

Autrement dit, la droite d'équation $y=\dfrac{1}{3}$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de f.

3. Pour tout x de D_f , $f(x)-\dfrac{1}{3}=\dfrac{x+2}{3x-6}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{x+2-(x-2)}{3(x-2)}=\dfrac{4}{3(x-2)}$

donc $f(x)$ est du signe de $x-2$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	‖	$+$	

Donc :

- sur $]-\infty;2[$, la courbe représentative de f est toujours au-dessous de son asymptote horizontale ;
- sur $]2;+\infty[$, la courbe représentative de f est toujours au-dessus de son asymptote horizontale.