Nom : .... **Prénom** : .... **Classe** : T^{le} S "spé maths"

le 18 / 02 / 2019

Note : .... / ....

INTERROGATION de MATHÉMATIQUES

Durée : 35 minutes. Calculatrice **AUTORISÉE**.

Exercice 1

D'après Bac (Polynésie, juin 2018) *env. 30 minutes*

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité.
À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

On se place dans un milieu où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6.
On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.
On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.
On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
On appelle X_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.
L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0{,}993\,025$ et $b_2 = 0{,}006\,975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
   A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.
   On admet que P est inversible et que
   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0{,}395^n & 1 - 0{,}395^n \\ 120\,(1 - 0{,}395^n) & 1 + 120 \times 0{,}395^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire une expression de a_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Exercice 2

env. 5 minutes

À l'aide du calcul matriciel, résoudre le système suivant : $\begin{cases} 2x + y = 1 + z \\ x + 2y - z = 2 \\ -y + x + 2z - 3 = 0 \end{cases}$.