Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET
AVEC VOTRE COPIE

SPÉCIALITÉ

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU MERCREDI 17 AVRIL 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées.

EXERCICE 1 [6 points] *Commun à tous les candidats*

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f_n(x)=x^2\mathrm{e}^{-2nx}.$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul : $\mathrm{I}_n=\int_0^1 f_n(x)dx$.

Partie A *Étude de la fonction f_1*

1. On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

a) Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x)=2x\mathrm{e}^{-2x}(1-x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.

d) Vérifier que pour tout réel x : $f_1(x)=\left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2. En utilisant un logiciel de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $\mathrm{F}_1(x)=-\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)$. En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B *Étude de la suite (I_n)*

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Interpréter graphiquement la quantité I_n.

b) Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n).
Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2. a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$:

$$f_{n+1}(x)=\mathrm{e}^{-2x}f_n(x).$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$:

$$f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x).$$

c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0;1]$:

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant \mathrm{e}^{-2nx}.$$

b) En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

EXERCICE 2 [5 points] *Commun à tous les candidats*

Les quatre questions sont indépendantes. Toute réponse doit être justifiée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = 2t \end{cases}$ ($t \in \mathbb{R}$), et le plan (P) d'équation $x+y+z-3=0$.

Déterminer la position relative de la droite (D) et du plan (P).

2. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par :

$$z_0 = 2+3i \text{ et pour tout entier naturel } n,\ z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n .$$

Pour quelles valeurs de n le réel $|z_n|$ est-il inférieur à 10^{-20} ?
Remarque : un algorithme n'est pas accepté.

3. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(6x-2)+\ln(2x-1)=\ln(x)$.
Combien l'équation admet-elle de solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$?

4. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(4z^2-20z+37)(2z-7+2i)=0$.
Démontrer que les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

EXERCICE 3 [4 points] *Commun à tous les candidats*

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois : • 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
• 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0;1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».
On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :
R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la valeur exacte de x.

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ». Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

EXERCICE 4 [5 points] *Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité*

Les parties A *et* B *sont indépendantes*

Partie A

Une association gère des activités pour des enfants. Elle propose deux programmes d'activités, le programme A : cirque - éveil musical, et le programme B : théâtre - arts plastiques.
À sa création en 2014, l'association compte 150 enfants qui suivent tous le programme A.
Pour chacune des années suivantes, le nombre d'enfants inscrits dans l'association reste égal à 150.
On dispose également des informations suivantes :
Chaque enfant ne peut suivre qu'un seul programme : soit le programme A, soit le programme B.
D'une année à l'autre, 20 % des inscrits au programme A choisissent à nouveau le programme A, alors que 40 % choisissent le programme B. Les autres quittent l'association.
D'une année à l'autre, 60 % des inscrits au programme B choisissent à nouveau le programme B et les autres quittent l'association.
Les nouveaux inscrits, qui compensent les départs, suivent obligatoirement le programme A.

On modélise le nombre d'inscrits au programme A et le nombre d'inscrits au programme B durant l'année $2014+n$ respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) et on note U_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$. On a donc $U_0 = \begin{pmatrix} 150 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = U_n M$ où $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} 75 + 75 \times 0,2^n & 75 - 75 \times 0,2^n \end{pmatrix}$.
3. En déduire la répartition des effectifs à long terme entre les deux programmes.

Partie B

L'association affecte à chaque enfant un numéro à 6 chiffres $c_1c_2c_3c_4c_5k$. Les deux premiers chiffres représentent l'année de naissance de l'enfant les trois suivants sont attribués à l'enfant au moment de sa première inscription. Le dernier chiffre, appelé clé de contrôle, est calculé automatiquement de la façon suivante :

- on effectue la somme $S = c_1 + c_3 + c_5 + a \times (c_2 + c_4)$ où a est un entier compris entre 1 et 9 ;
- on effectue la division euclidienne de S par 10, le reste obtenu est la clé k.

Lorsqu'un employé saisit le numéro à 6 chiffres d'un enfant, on peut détecter une erreur de saisie lorsque le sixième chiffre n'est pas égal à la clé de contrôle calculée à partir des cinq premiers chiffres.

1. Dans cette question seulement, on choisit $a = 3$.
   a. Le numéro 111383 peut-il être celui d'un enfant inscrit à l'association ?
   b. L'employé, confondant un frère et une sœur, échange leurs années de naissance : 2008 et 2011. Ainsi, le numéro $08c_3c_4c_5k$ est transformé en $11c_3c_4c_5k$. Cette erreur est-elle détectée grâce à la clé ?
2. On note $c_1c_2c_3c_4c_5k$ le numéro d'un enfant. On cherche les valeurs de l'entier a pour lesquelles la clé détecte systématiquement la faute de frappe lorsque les chiffres c_3 et c_4 sont intervertis. On suppose donc que les chiffres c_3 et c_4 sont distincts.
   a. Montrer que la clé ne détecte pas l'erreur d'interversion des chiffres c_3 et c_4 si et seulement si $(a-1)(c_4 - c_3)$ est congru à 0 modulo 10.
   b. Déterminer les entiers n compris entre 0 et 9 pour lesquels il existe un entier p compris entre 1 et 9 tel que $np \equiv 0 \quad (10)$.
   c. En déduire les valeurs de l'entier a qui permettent, grâce à la clé, de détecter systématiquement l'interversion des chiffres c_3 et c_4.