

Nom : Prénom :

RENDRE TOUT LE SUJET
AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU MERCREDI 17 AVRIL 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées.

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels par :

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

Partie A Étude de la fonction f_1

1. On admet que f_1 est dérivable sur \mathbb{R} et on note f_1' sa dérivée.

a) Justifier que pour tout réel x , $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.

b) Étudier les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .

c) Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.

d) Vérifier que pour tout réel x : $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2. En utilisant un logiciel de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par

$$F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right).$$

En déduire la valeur exacte de I_1 .

Partie B Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Interpréter graphiquement la quantité I_n .

b) Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n) .

Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2. a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$:

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$:

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n) .

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$:

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}.$$

b) En déduire un encadrement de la suite (I_n) , puis sa limite.

EXERCICE 2 [5 points]

Commun à tous les candidats

Les quatre questions sont indépendantes. Toute réponse doit être justifiée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite (D) de représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-3t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \text{ et le plan } (P) \text{ d'équation } x+y+z-3=0.$$

Déterminer la position relative de la droite (D) et du plan (P).

2. La suite (z_n) de nombres complexes est définie par :

$$z_0 = 2+3i \text{ et pour tout entier naturel } n, z_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}}{4}\right) z_n.$$

Pour quelles valeurs de n le réel $|z_n|$ est-il inférieur à 10^{-20} ?

Remarque : un algorithme n'est pas accepté.

3. On considère dans \mathbb{R} l'équation : $\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x)$.

Combien l'équation admet-elle de solutions dans l'intervalle $\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$?

4. On considère dans \mathbb{C} l'équation : $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2i) = 0$.

Démontrer que les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

EXERCICE 3 [4 points]

Commun à tous les candidats

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois :

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;

- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la valeur exacte de x .

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ». Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . On en donnera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , par la relation :

$$u_{n+1} = a u_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a .
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $] -1 ; 1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\frac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants. Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n , on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$.
 - a) Justifier que, pour tout entier naturel n , $h_{n+1} = 0,75h_n + 30$.
 - b) Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n) .
Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
 - c) La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.