TS-DM

UNE SUITE PARTICULIÈRE : LA SÉRIE HARMONIQUE

α ρ μ ο ν ι α

Pré-requis : suite croissante majorée converge, croissante non majorée diverge en l'infini, rais. par récurrence utile, algorithmique

La « série harmonique » est la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

On ajoute à chaque fois un terme de plus en plus petit. Voyons les premiers termes :

n	somme des 1/k de 1 à n
1	1,00
2	1,50
3	1,83
4	2,08
5	2,28
6	2,45
7	2,59
8	2,72
9	2,83
10	2,93
11	3,02
12	3,10
13	3,18
14	3,25
15	3,32

← les 15 premiers termes montrent une croissance très lente.

Avec de la patience et du courage, on peut calculer à la main :

$$\sum_{k=1}^{1\,000} \frac{1}{k} \approx 7{,}4855 .$$

Cette suite semble-t-elle converger lentement vers un réel ? Diverger ?

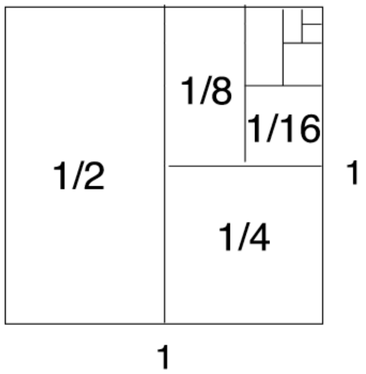
Au XIV[e] *siècle*[1]*, un français répondra à cette question difficile…*

1 Eh oui, contrairement aux idées reçues, au Moyen-Age aussi il y a eu des innovations : l'étrier, le rouet, la boussole, la poudre, le papier ou même les lunettes… Le moulin à eau, déjà connu sous l'Antiquité, se généralise et se perfectionne pendant cette période à tel point qu'il devient un élément caractéristique des territoires, et le meunier, un personnage emblématique. C'est au Moyen Age également que se créent les pôles universitaires que nous connaissons encore aujourd'hui, comme Oxford et Cambridge au Royaume-Uni, Paris, Louvain en Belgique ou Bologne en Italie. Les échanges entre l'Europe du Nord et l'arc méditerranéen ne cessent jamais et s'intensifient, tant sur terre que sur mer, ce qui facilite la diffusion des savoirs et des techniques.
Voir http://www.francetvinfo.fr/sciences/histoire/six-cliches-sur-le-moyen-age-auquel-vous-ne-devriez-pas-croire_1871925.html

… la série diverge très lentement, mais ce n'est pas évident !

Le français Nicole (Nicolas) Oresme est considéré comme le premier savant à avoir démontré, dans ses *Questions sur la Géométrie d'Euclide* rédigées au milieu du XIV^{e} siècle, la divergence de la série harmonique.

> *Étudiant en logique et en théologie au Collège de Navarre à l'université de Paris, Oresme s'y distingue très vite et en devient grand-maître en 1356. Après avoir enseigné pendant six ans au Collège de Navarre, Oresme entame ensuite une brillante carrière ecclésiastico-politique au service du roi Charles V (« le Sage ») dont il est successivement le secrétaire, le conseiller et le chapelain, sans cesser de s'intéresser aux questions scientifiques.*
> *Entre 1370 et 1376, à la demande du roi, il traduit en français la plus grande partie de l'œuvre d'Aristote qu'il enrichit de commentaires critiques qui révèlent sa propre pensée scientifique : Oresme formule notamment l'hypothèse de la rotation de la Terre sur elle-même en vingt-quatre heures, et celle, tout aussi audacieuse, de l'infinitude de l'univers. Pour le récompenser de ce travail considérable qui contribue au rayonnement de la langue française, le roi le sacrera évêque de Lisieux le 23 janvier 1378 et lui offrira deux anneaux d'or.*
> *Oresme meurt le 11 juillet 1382, deux ans après Charles V.*
> *Tant par son style novateur que par son esprit à la fois critique et audacieux, Oresme aura joué un rôle capital dans le passage de la science médiévale à la science moderne.*
> *Ses œuvres qui regroupent aussi bien l'astronomie, l'astrologie (art divinatoire qu'il a remis en cause), les mathématiques, la physique et l'économie politique montrent une personnalité hors du commun, qui s'est intéressée à toutes les réflexions de son temps, à tous les débats. Homme d'Église, fidèle à sa tradition, il n'a pourtant pas hésité à formuler des hypothèses, émettre des doutes, oser avancer des arguments qui allaient à contresens des volontés théologiques de son temps.*
> *Il a bénéficié de l'appui royal, sachant rester conseiller et homme de confiance d'un roi, Charles V, qui, grâce à son amour des arts et sa volonté de développer l'érudition, lui a permis de travailler dans des conditions matérielles et intellectuelles exceptionnelles.*



Oresme parvient à calculer la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ géométriquement, avec le dessin page suivante.

Il trouve alors aisément : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=2$.

De nos jours, on pourrait remarquer qu'il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donc :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}=1\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ qui tend vers 2.

Le résultat le plus remarquable obtenu par Oresme est la démonstration de la nature infinie de la série harmonique : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$. Le résultat est loin d'être évident !

- Tout d'abord, on ajoute à chaque fois un terme de plus en plus petit.
Or la suite $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ vue ci-dessus vérifie aussi cela et converge pourtant vers 2.

- De plus, que dire alors des termes de rang 1000 , $10\,000$ et $50\,000$ que l'on peut facilement calculer aujourd'hui avec un tableur, mais qui ne pouvaient pas l'être à l'époque :

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k} \approx 7{,}4855 \text{ et } \sum_{k=1}^{10\,000} \frac{1}{k} \approx 9{,}7876 \text{ et } \sum_{k=1}^{50\,000} \frac{1}{k} \approx 11{,}3970 .$$

Il faut ajouter plus de 10^{43} termes[2] de la série pour que la somme dépasse 100… O_O

2 Soit plus de dix millions de milliards de milliards de milliards de milliards de termes...
Le nombre exact de termes, calculé en 1968, est 15 092 688 622 113 788 323 693 563 264 538 101 449 859 497.

<u>*Notions/propriétés utiles dans le devoir*</u>

Définition : On dit qu'une suite (v_n) est une ***suite extraite*** de (u_n) s'il existe une fonction S strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{S(n)}$

Par exemple, la suite (u_{2n}) est une suite extraite de (u_n). Ou encore : (u_{3n+1}) est une suite extraite de (u_n).

On admet la propriété suivante[3] :

Propriété : Si (u_n) converge vers l, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers l.

Par exemple, si (u_n) converge vers l, alors la suite (u_{2n}) converge vers l.

Dans la suite, on notera $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Une suite strictement croissante et un théorème

1. Démontrer que (u_n) est strictement croissante.

2. *Rappels :* - *Une suite croissante majorée converge.*
- *Une suite croissante non majorée diverge vers* $+\infty$.

Démontrer qu'une suite croissante qui ne converge pas diverge vers $+\infty$.

II. Une suite divergente en l'infini

Démontrons (de différentes façons) que (u_n) diverge vers $+\infty$.

II.1 Démonstration « par extraction absurde »

Ici, on se propose d'extraire une suite pour aboutir, par un raisonnement par l'absurde, à la divergence de la série harmonique.
On rappelle que la suite (u_n) est croissante.

1. a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Remarque : je vois ici au moins deux méthodes.

b) Démontrer par l'absurde que (u_n) ne converge pas.

2. Déduire des questions précédentes que (u_n) diverge vers $+\infty$.

3 Qu'on pourra démontrer dans un autre devoir à la maison, sur les suites extraites.

II.2 Démonstration du français Nicole Oresme (vers 1320 – 1382, mort vers 62 ans)

Écrite rapidement, l'idée (de génie !) d'Oresme est la suivante :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ \dots$$

$$=\ 1+\frac{1}{2}\ +\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}\right)+\dots$$

Son idée consiste à regrouper les termes par blocs en doublant la taille des blocs à chaque fois.

$$>\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ +\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}\right)+\dots$$

$$>\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$$

Oresme en conclut qu’ « *il y a ici une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d’un pied, donc le tout sera infini* ».

On remarque que Oresme a écrit des inégalités de limites avant même de savoir si ces limites existaient, étaient finies ou infinies. Démontrons donc tout cela avec la rigueur d'aujourd'hui :)

On note : $v_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^{n+1}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Autrement dit, $v_n=u_{2^{n+1}}$.

On note également, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\mathrm{A}_n=\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\dots+\frac{1}{2^n+2^n}$.

On a par exemple $\mathrm{A}_0=\frac{1}{2}$ et $\mathrm{A}_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ et $\mathrm{A}_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$.

1. a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=v_n+\mathrm{A}_{n+1}$.

b) A l'aide de ce résultat, démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n=1+\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\dots+\mathrm{A}_n$.

2. a) A_n est la somme de combien de termes ?

b) On admet - c'est une simple conséquence de la décroissance de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ - que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^n+1}\geqslant\frac{1}{2^n+2}\geqslant\dots\geqslant\frac{1}{2^n+2^n}.$$

En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\mathrm{A}_n\geqslant\frac{2^n}{2^n+2^n}$, et donc que $\mathrm{A}_n\geqslant\frac{1}{2}$.

3. a) Déduire du 1.b) et du 2.b) que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $v_n\geqslant 1+\frac{n+1}{2}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4. a) On a $v_n=u_{2^{n+1}}$. Démontrer que (v_n) est une suite extraite de (u_n).

b) En déduire la limite de la série harmonique (u_n). Bien justifier.

II.3 Démonstration de l'italien Pietro Mengoli (vers 1626 – 1686, mort vers 60 ans)

Mengoli commence par retrouver, aux alentours de 1650, le résultat d'Oresme sur la divergence de la série harmonique. Voici son idée :

> Mengoli établit d'abord que « *dans toute progression harmonique, la moyenne arithmétique de trois termes consécutifs est supérieure au terme du milieu* ». Cela signifie ici :
> pour tout $p \geqslant 2$, $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\right) > \frac{1}{p}$.
> Puis il regroupe les termes de la série harmonique 3 par 3 :
> $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\ldots \quad > \quad 1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\frac{3}{12}+\ldots$
> et donc $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots \quad > \quad 1+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\ldots$
> Puis il recommence : $\ldots \quad > \quad 1+1+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\ldots$
> Etc. Ce qui montre que la série harmonique est supérieure à n'importe quel entier : elle diverge vers +∞.

Mengoli aurait pu s'arrêter plus tôt dans son raisonnement, comme nous allons le voir.
Démontrons tout cela avec rigueur :

1. Démontrer que pour tout entier $p \geqslant 2$: $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\right) > \frac{1}{p}$ et donc que $\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1} > \frac{3}{p}$.

2. On note $v_n = u_{3n+1}$. La suite (v_n) est donc une suite extraite de (u_n) .

a) En utilisant le résultat de la question 1., démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n > 1 + u_n$.

b) En déduire que (u_n) ne peut converger.
Comme à la question 2. du II.1, on peut alors conclure qu'elle diverge vers +∞.

II.4 Et les Bernoulli ?

On attribue souvent les premières démonstrations de la divergence de la série harmonique aux célèbres mathématiciens suisses d'origine belge Jean Bernoulli (1677-1748) et Jacob – souvent francisé Jacques – Bernoulli (1654-1705).
En réalité, les Bernoulli ont bien démontré cela sans connaître le travail de Mengoli[4].
C'est Jean qui le démontra le premier (dans un ouvrage publié en 1743) ; en 1744, son frère Jacques en donna deux autres preuves (dans un ouvrage publié post-mortem).
Remarque : les Bernoulli correspondaient avec Leibniz, qui lui connaissait la démonstration de Mengoli. Mais Leibniz ne la mentionna jamais dans ses lettres.

Voici l'idée de l'une des démonstrations de Jacob :

> Pour tout entier n, on a :
> $$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n^2-n}\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=1$$
> donc, en regroupant les termes de la série géométrique par paquets entre l'indice n et n^2, on peut dépasser toute quantité donnée. Ainsi :
> $$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{25}\right) \geq 1+1+1=3$$
> Les regroupements peuvent être effectués aussi loin que l'on veut.

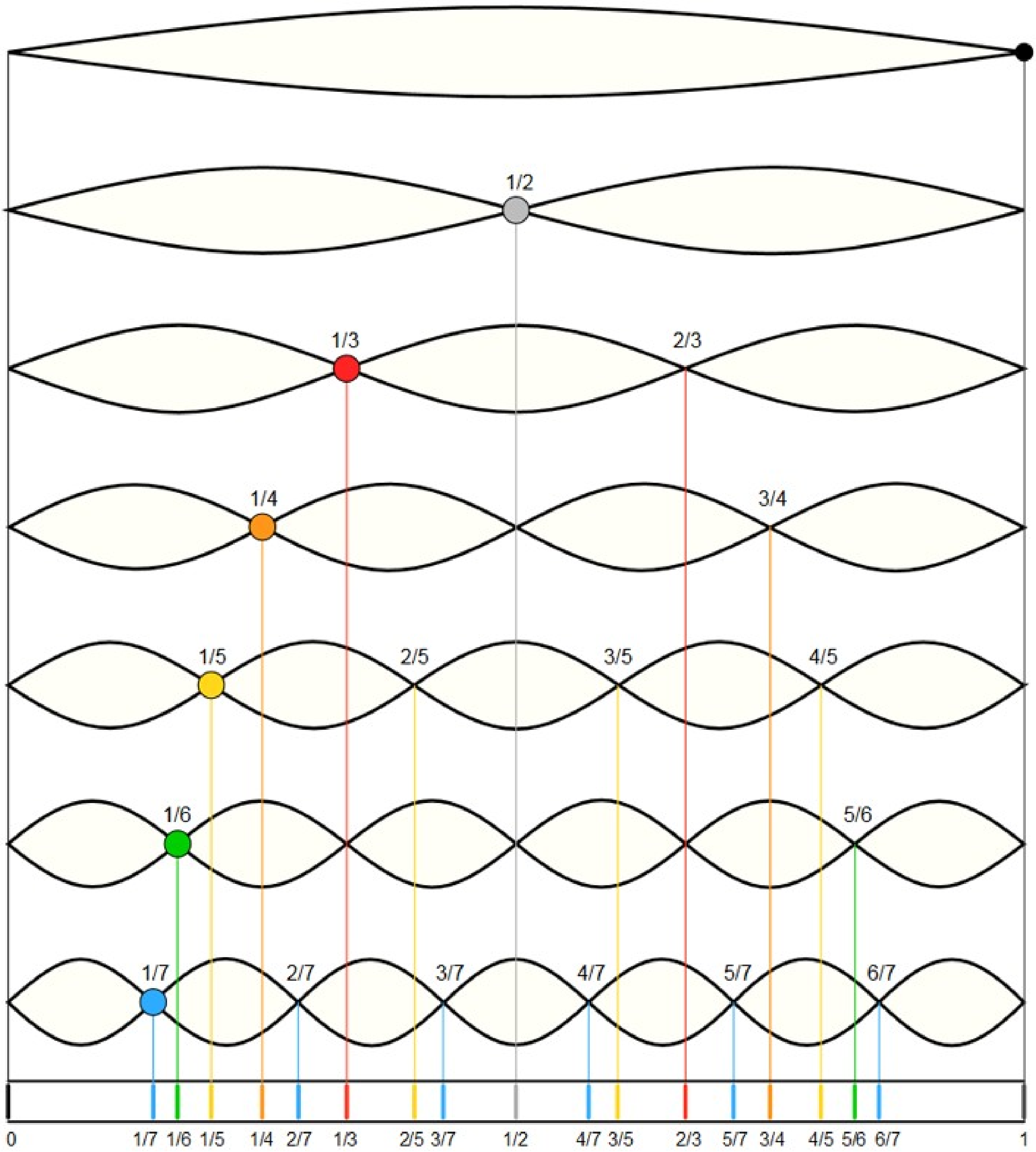
4 Source : www.e-periodica.ch/cntmng?pid=ens-001:1959:5::39

III. En quoi c'est harmonique ce machin ?

Vous savez sans doute que le réformateur religieux, mathématicien et philosophe[5] Pythagore vouait aux nombres et aux proportions un profond mysticisme. Avec son école, il aurait créé la première gamme de notes de musique[6].

« Harmonie » vient du latin *harmonia*, mot qui vient lui-même du grec αρμονια signifiant au sens propre *arrangement, ajustement, assemblage de plusieurs parties, juste rapport…*

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ « s'introduit naturellement » en musique et les pythagoriciens l'avaient observé : en pinçant une corde sur sa moitié, au tiers, au quart… on obtient ***des notes « harmonieuses »***.



5 Héraclide du Pont (340 av. J.-C.) attribue la création du mot « philosophe » à Pythagore (530 av. J.-C.), lequel ne se présentait pas comme un sage, mais comme « amoureux de la sagesse » (φιλόσοφος), ce qui donna le mot « philosophe ». On peut donc dire que « philosophie est amour de la sagesse ».

6 En fait, les égyptiens utilisaient déjà une gamme de 7 notes qu'ils avaient associées aux 7 planètes.

Pour terminer, voici le sommaire d'un complément de 24 pages (disponible sur mon site[7]) qui fait le lien entre cette suite harmonique, la création historique des notes du solfège que l'on connaît tous (Do, Ré, Mi, Fa…) et la théorie musicale actuellement majoritaire dans le monde.
C'est loin d'être aussi simple qu'on le pense et si l'on prend un peu de recul, il n'y a absolument rien d'évident à tout cela : noter des sons que l'on entend comme « justes », créer des instruments qui respectent ces notations (extrême difficulté à lier théorie mathématique et construction physique d'un instrument), etc.

Il aura fallu le génie de plusieurs hommes, sur des siècles et des siècles,
pour arriver récemment à la théorie musicale que l'on connaît.

7 www.mathemathieu.fr