Nom : .... **Prénom** : ....

T°S

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 3

MERCREDI 20 FÉVRIER 2019

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice.
Si vous le suivez, il vous restera alors 10 min.

EXERCICE 1 (5,5 points) env. 30 min

Soit z_1 et z_2 les deux nombres complexes suivants : $z_1=1-\mathrm{i}$ et $z_2=-8-8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

On pose $\mathrm{Z}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

1. Déterminer, en détaillant les calculs et en simplifiant le résultat, la forme algébrique de Z.

2. Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3. Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

4. En déduire que : $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

5. On admet que : • $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

• pour tous réels a et b : $\cos a\cos b-\sin a\sin b=\cos(a+b)$.

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$:

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cos x-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin x=-2\sqrt{3}\,.$$

EXERCICE 2 (11,5 points) env. 55 min

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x : $g(x)=-2x^3+x^2-1$.

1. a) Étudier les variations de la fonction g.

b) Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1;0]$.

b) A l'aide de votre calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
Expliquer rapidement votre démarche.

3. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x : $f(x)=(1+x+x^2+x^3)\mathrm{e}^{-2x+1}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2. a) Démontrer que pour tout réel $x>1$: $1<x<x^2<x^3$.

b) En déduire que, pour tout réel $x>1$: $0<f(x)<4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$.

c) On admet que, pour tout entier naturel n : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}=0$.

Vérifier que, pour tout réel x : $4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}=\frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}$.

En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}=0$.

d) On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{\mathrm{i}},\vec{\mathrm{j}})$. En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout réel x : $f'(x)=(-2x^3+x^2-1)\mathrm{e}^{-2x+1}$.

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 (3 points) `env. 15 min`

Pour chacune des trois questions, une ou plusieurs réponses sont exactes.
Cocher ci-dessous la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est demandée.
Il sera attribué 1 point si la réponse est exacte, 0 sinon, et -0,25 si la réponse est inexacte.
La note finale sera ramenée sur 3 points.

1. On note (E) l'équation d'inconnue complexe z : $z^2+2az+a^2+1=0$, où a désigne un nombre réel.

☐ Pour toute valeur de a, (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{C}$.

☐ Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont distincts.

☐ Pour toute valeur de a, les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux.

☐ Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

2. Soit θ un nombre réel dans l'intervalle $]0;\pi[$ et z le nombre complexe : $z=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
Pour tout réel θ dans l'intervalle $]0;\pi[$:

☐ Le nombre z est un réel positif. ☐ Un argument de z est θ.

☐ Le nombre z est égal à 1. ☐ Un argument de z est $\frac{\theta}{2}$.

3. Une urne contient 5 boules bleues et 3 boules grises indiscernables au toucher.
On tire successivement, de manière indépendante, 5 boules avec remise dans cette urne.
On note alors X la variable aléatoire comptant le nombre de boules grises tirées.
On note E(X) l'espérance de X. On a alors :

☐ $\mathrm{E}(\mathrm{X})=3$. ☐ $p(\mathrm{X}\geqslant 1)\approx 0{,}905$.

☐ $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\frac{3}{8}$. ☐ $p(\mathrm{X}\geqslant 1)\approx 0{,}095$.