T°S

Exercice 58 p.131 "La piscine"

a) $f(0)=3$ $f(8)=4$ $f'(0)=0$ $f'(8)=0$

b) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

f polynôme donc f est dérivable sur $[0;8]$ et :

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c.$$

NE JAMAIS FAIRE ÇA EN DS

c) d)
$$\begin{cases} f(0)=3 \\ f(8)=4 \\ f'(0)=0 \\ f'(8)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d=3 \\ a\times 8^3+b\times 8^2+c\times 8+d=4 \\ c=0 \\ 3a\times 8^2+2b\times 8+c=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ 512a+64b+3=4 \\ c=0 \\ 192a+16b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ 512a+64b=1 \\ 192a+16b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a=\dfrac{1-64b}{512} \\ 192\times\dfrac{1-64b}{512}+16b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a=\dfrac{1-64b}{512} \\ \dfrac{192}{512}-8b=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a=\dfrac{1-64b}{512} \\ b=\dots=\dfrac{3}{64} \end{cases} \iff \begin{cases} d=3 \\ c=0 \\ a=\dots=-\dfrac{1}{256} \\ b=\dfrac{3}{64} \end{cases}$$

2.a) $E(12;0)$ $E'(4;0)$ On note $\mathcal{C}_{DE}$ le quart de cercle $\widehat{DE}$.

$M(x;y) \in \widehat{DE} \iff E'ME$ rectangle en M et $x \in [8;12]$, $y \in [0;4]$

$\iff E'E^2 = E'M^2 + ME^2$ et...

$\iff 8^2 = (x-4)^2 + y^2 + (x-12)^2 + (-y)^2$ et...

$\iff 64 = x^2 - 8x + 16 + y^2 + x^2 - 24x + 144 + y^2$ et...

$\iff 0 = 2x^2 - 32x + 96 + 2y^2$ et...

$\iff 0 = x^2 - 16x + 48 + y^2$ et...

$\iff y^2 = -x^2 + 16x - 48$ et...

$\iff \underline{y = \sqrt{-x^2+16x-48}}$ et $x \in [8;12]$

D'où $\underline{h(x) = \sqrt{-x^2+16x-48}}$.

b) • De même... équation du cercle de centre O passant par A (quart de cercle) : $x^2+y^2=9$ donc $\underline{y = \sqrt{9-x^2}}$ avec $x \in [-3;0]$

• Sur $[0;8]$, la courbe représente $f(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2 + 3$ (q° 1)

• La courbe est visiblement symétrique par rapport à l'axe des abscisses, donc la piscine est la réunion de $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_{-g}$.

c) • Sur $]-3;0[$: $x \mapsto 9-x^2$ est dérivable, à valeurs dans $]0;9[$
et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;9[$
donc $x \mapsto \sqrt{9-x^2}$ dérivable sur $]-3;0[$.

• Sur $]0;8[$, g est un polynôme donc dérivable.

• Sur $]8;12[$, $x \mapsto -x^2+16x-48$ est dérivable, à valeurs dans $]0;+\infty[$
et $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$
donc $x \mapsto \sqrt{-x^2+16x-48}$ est dérivable sur $]8;12[$.

• Étude en 0 : $(g(0)=3)$

• sur $]0;8[$: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{-\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2 + 3 - 3}{x} = -\frac{1}{256}x^2 + \frac{3}{64}x$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$.

• sur $[-3;0[$: $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \dfrac{\sqrt{9-x^2}-3}{x} = \dfrac{9-x^2-3^2}{x(\sqrt{9-x^2}+3)} = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}+3}$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$ → Donc g est dérivable en 0.

Suite exercice 58 p.131 "La piscine" TD.

- **Etude en 8** $\left(g(8) = \dots = 4\right)$

  - Sur $[0;8[$: $\dfrac{g(x)-g(8)}{x-8} = \dfrac{-\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2 - 1}{x-8}$ à détailler

$$= \frac{\cancel{(x-8)}(-x^2+4x+32)}{256\,\cancel{(x-8)}}$$

$$= \frac{1}{256}(-x^2+4x+32)$$

donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 8\\ x<8}} \frac{g(x)-g(8)}{x-8} = \frac{1}{256}(-8^2+4\times 8+32) = 0.$

  - Sur $]8;12[$: $\dfrac{g(x)-g(8)}{x-8} = \dfrac{\sqrt{-x^2+16x-48}-4}{x-8}$

$$= \frac{-x^2+16x-48-4^2}{(x-8)(\sqrt{-x^2+16x-48}+4)}$$

$$= \frac{-x^2+16x-64}{(x-8)(\sqrt{-x^2+16x-48}+4)}$$

$$= \frac{-\cancel{(x-8)}(x-8)}{\cancel{(x-8)}(\sqrt{-x^2+16x-48}+4)}$$

$$= \frac{-x+8}{\sqrt{-x^2+16x-48}+4}$$

donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 8\\ x>8}} \frac{g(x)-g(8)}{x-8} = 0$

Donc g est dérivable en 8.

- **Etude en −3** : $X \mapsto \sqrt{X}$ n'est pas dérivable en 0

  donc $x \mapsto \sqrt{9-x^2}$ n'est pas dérivable en −3.

  ie g n'est pas dérivable en −3.

- **Etude en 12** : Idem (et $-12^2+16\times 12-48=0$)

  ie g n'est pas dérivable en 12.