Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MARDI 15 JANVIER 2019

MATHÉMATIQUES

Série ES : enseignement obligatoire

Coefficient : 5

Série L : enseignement de spécialité

Coefficient : 4

Durée de l'épreuve : 3 heures.

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [7 points] *Commun à tous les candidats*

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1;15]$ par : $C(x)=0{,}3x^2-x+e^{-x+5}$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.
- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1;15]$ par : $R(x)=3x$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.
- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.
Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.

2. a) Déterminer les valeurs C(6) et R(6) puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1;15]$ par : $g(x)=-0{,}6x+4+e^{-x+5}$.
On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle [1 ; 15] et on note g' sa fonction dérivée.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$.

b) En déduire que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[1;15]$.

2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.

b) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;15]$.
Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

c) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1;15]$.

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a : $D(x)=-0{,}3x^2+4x-e^{-x+5}$.

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1;15]$ et on note D′ sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a $D'(x)=g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.

3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1;15]$.

4. a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

EXERCICE 2 [5 points] *Commun à tous les candidats*

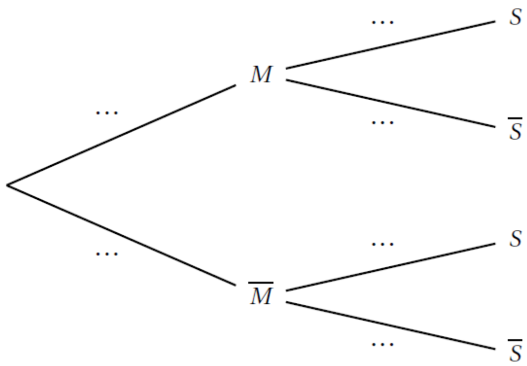
Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique.
On note :
- S l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- M l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique.

1. On admet que :
- lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
- lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

a) À l'aide des données de l'énoncé, préciser les valeurs de $p(M)$, $p_M(S)$ et $p_{\overline{M}}(\overline{S})$.

b) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous illustrant cette situation.



c) Montrer que : $p(S)=0{,}02192$.

d) En déduire la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique.
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. 80 personnes s'apprêtent à passer le portique de sécurité. On suppose que, pour chaque personne, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,02192.
Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes faisant sonner le portique, parmi les 80 personnes de ce groupe.

a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b) Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

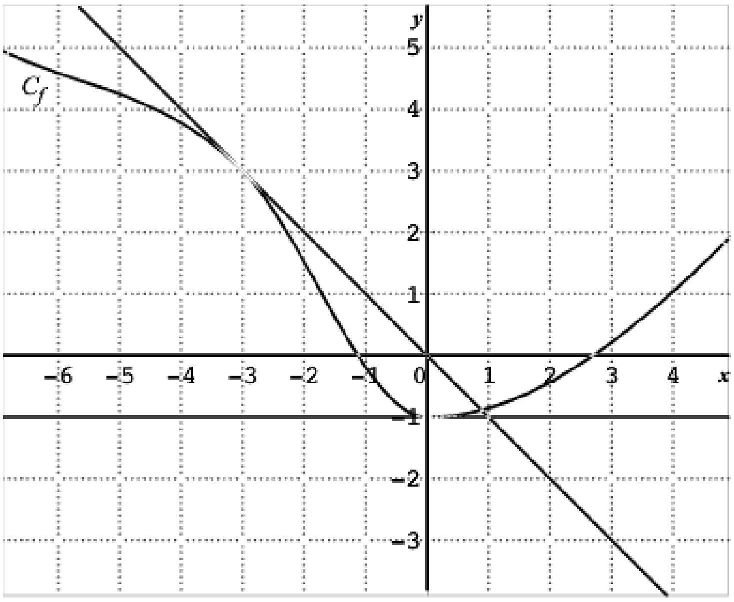
c) Déterminer la valeur arrondie à 10^{-3} de :
- la probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique ;
- la probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique.

d) Sans le justifier, donner la valeur du plus petit entier n tel que $p(X \leqslant n) \geqslant 0{,}9$.

EXERCICE 3 [3 points] *Commun à tous les candidats*

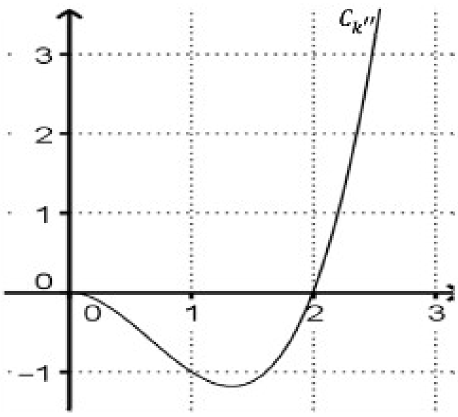
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point.
Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.

1. La représentation graphique d'une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses −3 et 0.



a) $f'(0)=-1$ **b)** $f'(-1)=0$ **c)** $f'(-3)=-1$ **d)** $f'(-3)=3$

2. On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde k'' d'une fonction *k* définie sur $[0;+\infty[$.



a) *k* est concave sur l'intervalle $[1;2]$ **b)** *k* est convexe sur l'intervalle $[0;2]$
c) *k* est convexe sur $[0;+\infty[$ **d)** *k* est concave sur $[0;+\infty[$

3. Le prix d'une action a augmenté chaque mois de 5 % et cela pendant 3 mois consécutifs.
Globalement, le prix de l'action a été multiplié par :

a) $1{,}05^3$ **b)** 1,15 **c)** $3\times1{,}05$ **d)** 1,45

EXERCICE 4 [5 points]

Candidats de ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de série L

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
A l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année.
Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2004+n$. On a ainsi $u_0=25\,000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes : **a)** au 1er janvier 2005 ;

b) au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n=25000\times0{,}85^n$.

3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.
Recopier et compléter l'algorithme ci-contre.

```
u ← 25 000
n ← 0
Tant que …………… faire
        u ← ……………
        n ← ……………
Fin Tant que
Afficher n
```

4. Donner la valeur n affichée après l'exécution de l'algorithme.

Partie B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite.
Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014+n$. On a ainsi $v_0=5000$.

1. a) Calculer v_1 et v_2.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}=0{,}75\times v_n+400$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n=v_n-1600$.

a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de w_0.

b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n=1600+3\,400\times0{,}75^n$.

d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

ANNEXE

Exercice 1