Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET
AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU MERCREDI 16 JANVIER 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées.

EXERCICE 1 [7 points] *Commun à tous les candidats*

Les parties A et B sont indépendantes.

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

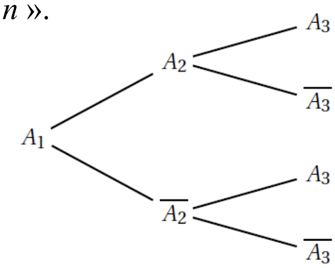
Partie A

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note A_n l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine *n* ».
On a ainsi $\mathrm{p}(\mathrm{A}_1) = 1$.

1. a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.



b) Démontrer que $\mathrm{p}(\mathrm{A}_3) = 0{,}85$.

c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ? Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = \mathrm{p}(\mathrm{A}_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_{n+1} = 0{,}5\, p_n + 0{,}4$.

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n > 0{,}8$.

b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

c) La suite (p_n) est-elle convergente ?

4. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $v_n = p_n - 0{,}8$.

a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de *n*.
En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^{n-1}$.

c) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Partie B

Le détaillant veut faire un sondage auprès de ses clients.
Il interroge au hasard *n* clients, en admettant que ce choix se ramène à *n* tirages successifs indépendants et avec remise. On suppose que la probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un de ses melons est égale à 0,8. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients ayant acheté un de ses melons parmi les *n* interrogés.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

2. Dans cette question, on suppose que $n = 40$.
a) Déterminer la probabilité qu'exactement 15 des 40 clients interrogés aient acheté un de ses melons.

b) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des clients interrogés aient acheté un de ses melons.

EXERCICE 2 [5 points] *Commun à tous les candidats*

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

- **a.** Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
- **b.** Justifier que, pour tout réel $x \neq 0$, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

  En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
- **c.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

  Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
- **d.** Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
- **e.** En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.
- **f.** Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathscr{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. Étude de la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

- **a.** Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
- **b.** Déterminer la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

EXERCICE 3 [3 points] *Commun à tous les candidats*

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct.

On considère l'équation : (E) $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.

Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

EXERCICE 4 [5 points] *Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité*

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante :

$$z_0=1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \ z_{n+1}=\frac{1}{3}z_n+\frac{2}{3}\mathrm{i}.$$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.
Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=z_n-\mathrm{i}$ et on note B_n le point d'affixe u_n.
On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n(1-\mathrm{i})$.

3. a) Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

b) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n-\mathrm{i}|=0$.

c) Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4. a) Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.
On pourra par exemple montrer que ces points appartiennent à la droite d'équation $y=-x$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, A_n appartient à la droite d'équation réduite : $y=-x+1$.