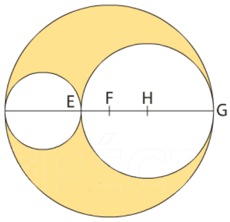
CORRECTION DE L'EXERCICE 27 DE LA FEUILLE D'EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

27 Dans un grand cercle de diamètre 10 cm, on trace deux cercles tangents ; on note x le diamètre, en cm, de l'un des deux cercles.



f est la fonction qui à x associe l'aire, en cm^2, du domaine blanc.

a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

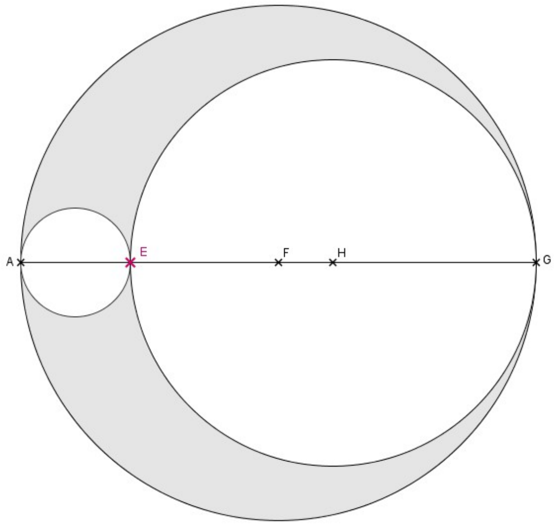
b) Donner l'expression algébrique de $f(x)$.

c) Tracer la courbe représentant f à l'écran d'une calculatrice en précisant la fenêtre graphique choisie.

d) Conjecturer l'existence d'un minimum pour la fonction f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

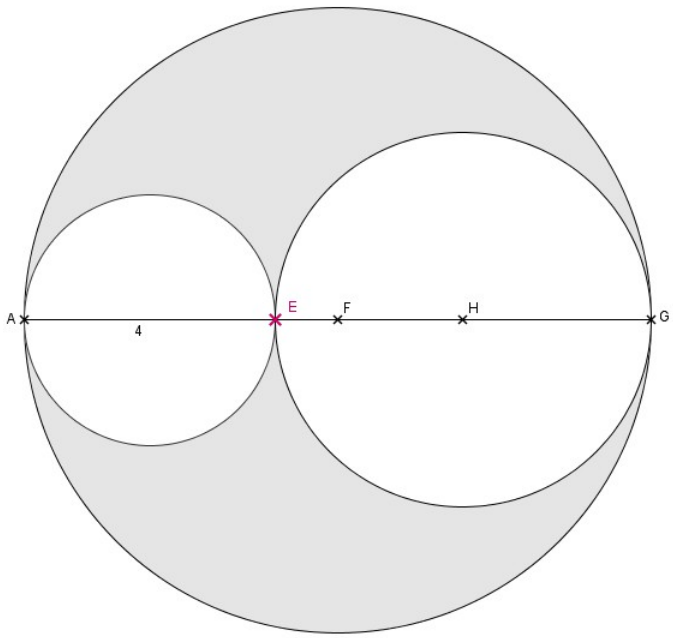
e) Vérifier que $f(x) - f(5) = \frac{\pi}{2}(x-5)^2$.

En déduire le minimum de f et faire la figure dans ce cas.

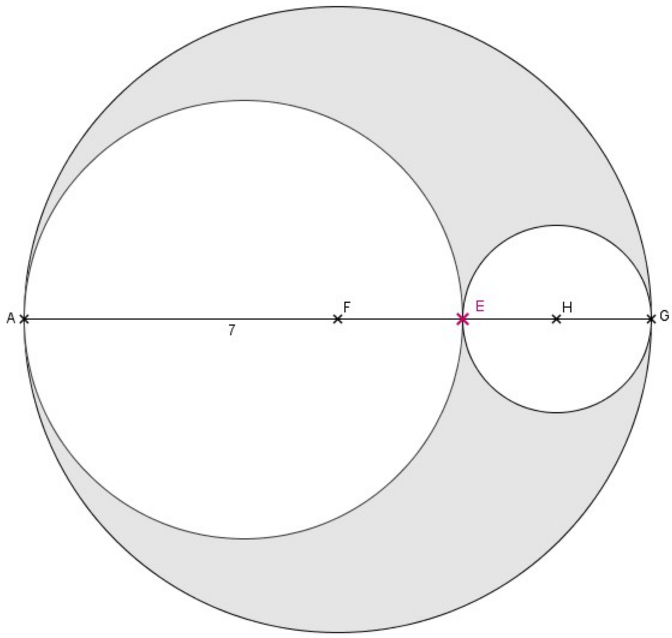


a) On note x le diamètre d'un des deux cercles, par exemple x = AE.
Le point E appartenant au diamètre [AG], la variable x varie entre 0 et 10, ce qui signifie que l'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle [0 ; 10].

Cas où x=4



Cas où x=7

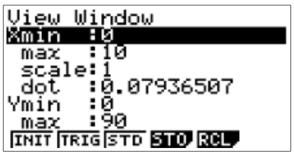


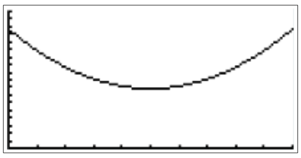
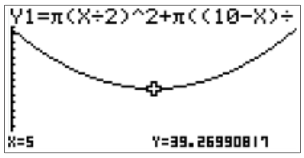
b) L'aire du domaine blanc est égale à la somme des aires des disques de diamètres [AE] et [EG], donc :

pour tout $x \in [0~;~10]$, $f(x)=\pi\times\left(\frac{AE}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{EG}{2}\right)^2=\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{10-x}{2}\right)^2$.

donc $f(x)=\pi\left[\frac{x^2}{4}+\frac{(10-x)^2}{4}\right]=\pi\left[\frac{x^2}{4}+\frac{100-20x+x^2}{4}\right]=\pi\left[\frac{2x^2-20x+100}{4}\right]=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}\left(x^2-10x+50\right)}$

c) Puisque $x \in [0~;~10]$, on choisit : Xmin = 0 et Xmax = 10.
$f(x)$ étant la mesure d'une aire, $f(x)$ est positif; on prend Ymin = 0 et Ymax = 90 (90 *au hasard*).



d) Sur la calculatrice, la courbe représentative de f semble « descendre » puis « monter »; on peut alors conjecturer l'existence d'un minimum pour cette fonction : ce minimum semble valoir environ 39,2699 et être atteint pour la valeur $x = 5$.

e) • $f(5)=\frac{\pi}{2}\left(5^2-10\times5+50\right)=\frac{25}{2}\pi$.

Pour tout $x \in [0 ; 10]$:

$f(x)-f(5)=\frac{\pi}{2}\left(x^2-10x+50\right)-\frac{25}{2}\pi$

donc $f(x)-f(5)=\frac{\pi}{2}\left(x^2-10x+50-25\right)$

donc $f(x)-f(5)=\frac{\pi}{2}\left(x^2-10x+25\right)$.

Or, $x^2-10x+25=(x-5)^2$

donc finalement : *pour tout* $x\in[0;10]$, $f(x)-f(5)=\frac{\pi}{2}(x-5)^2$.

• Pour tout $x \in [0 ; 10]$, $\frac{\pi}{2}(x-5)^2\geqslant0$

donc pour tout $x \in [0 ; 10]$, $f(x)-f(5)\geqslant0$

donc pour tout $x\in[0;10]$, $f(x)\geqslant f(5)$.

Cela signifie que le minimum de f est atteint en 5, et vaut $f(5)=\frac{25}{2}\pi\approx39{,}2699$.

Conclusion : l'aire du domaine blanc est minimale lorsque $AE=5\,cm$, c'est-à-dire lorsque les deux cercles ont le même diamètre; cette aire mesure alors $\frac{25}{2}\pi$ cm², soit environ 39,2699 cm².