Exercice 1 : 20 minutes

1. $AB = \sqrt{13}$

$CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(3+4)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}$

$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5+4)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117}$

- Il est clair que ABC n'est ni isocèle, ni équilatéral…
- Par contre : $AC^2 = 130$ et $AB^2 + BC^2 = 13 + 117 = 130$
  donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$
  Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore : le triangle ABC est rectangle en B.

2.

a) $M(x_M; y_M)$ avec $x_M = \frac{x_A + x_C}{2}$ $\quad x_M = \frac{3-4}{2}$ $\quad x_M = -\frac{1}{2}$

$y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$ $\quad y_M = \frac{7-2}{2}$ $\quad y_M = \frac{5}{2}$

Donc M a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$.

b) On remarque que M est aussi le milieu de [BD].
Donc ABCD est un quadrilatère dont les diagonales ont le même milieu,
donc ABCD est un parallélogramme.

c) On a démontré à la question 1. que le triangle ABC était rectangle en B.
Donc le parallélogramme ABCD possède un angle droit,
donc ABCD est un rectangle.
De plus, ABCD n'est pas un carré car $AB \neq CB$.

3. BACE est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ les diagonales [BC] et [AE] se coupent en leur milieu

$\Leftrightarrow \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{x_A + x_E}{2}$ et $\frac{y_B + y_C}{2} = \frac{y_A + y_E}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{5-4}{2} = \frac{3 + x_E}{2}$ et $\frac{4-2}{2} = \frac{7 + y_E}{2}$

$\Leftrightarrow 1 = 3 + x_E$ et $2 = 7 + y_E$

$\Leftrightarrow 1 - 3 = x_E$ et $2 - 7 = y_E$

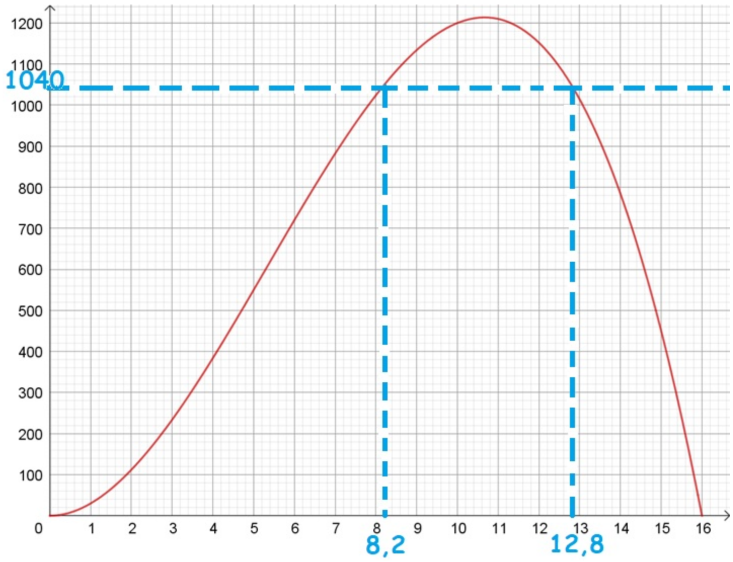
$\Leftrightarrow -2 = x_E$ et $-5 = y_E$

Donc les coordonnées de E tel que BACE soit un parallélogramme sont : $(-2; -5)$.

4. $BH = \sqrt{(x_B - x_H)^2 + (y_B - y_H)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$

Or BH est environ égal à 4,47 mais pas exactement égal à 4,47. Donc B n'est pas sur le cercle de centre H de rayon 4,47 (il est sur le cercle de centre H de rayon $\sqrt{20}$).

Exercice 2 : 10 minutes



1. On cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de V et de la droite d'équation $y = 1040$.
   Graphiquement, on trouve deux solutions : 8,2 et 12,8.

2.
   a) $V\left(\frac{32}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{32}{3}\right)^2 \times \left(16 - \frac{32}{3}\right) = 2 \times \frac{1\,024}{9} \times \left(\frac{48}{3} - \frac{32}{3}\right) = \frac{2 \times 1\,024 \times 16}{9 \times 3} = \frac{32\,768}{27}$

   soit un volume maximal d'environ 1213,63 cm^3.

   b)

x	0	$\frac{32}{3}$	16
$f(x)$	0 ↗	$\frac{32\,768}{27}$	↘ 0

3. Sur le plan, on a (horizontalement) : $y + x + y + x = 32$
   soit $2y = 32 - 2x$
   d'où $y = 16 - x$.
   Sur ce même plan, on (verticalement) : $2y + h = 32$
   soit $h = 32 - 2y$
   d'où $h = 32 - 2(16 - x)$
   $h = 32 - 2 \times 16 + 2x$
   $h = 32 - 32 + 2x$
   $h = 2x$.
   Par conséquent, le volume de la boîte sera, en fonction de x :
   $V(x) = x \times y \times h$
   $V(x) = x \times (16 - x) \times 2x$
   $V(x) = 2x^2(16 - x)$.

Exercice 3 : 10 minutes

$g(x) = (-7x+1)^2 - (2x-3)^2$

$g(x) = 45x^2 - 2x - 8$

1. On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2$ avec $a = -7x+1$ et $b = 2x-3$.

$$\begin{aligned} g(x) &= (-7x+1)^2 - (2x-3)^2 \\ &= [(-7x+1) + (2x-3] \, [(-7x+1) - (2x-3)] \\ &= (-7x+1+2x-3)(-7x+1-2x+3) \end{aligned}$$

$g(x) = (-5x-2)(-9x+4)$

2. $g(x) = 0 \iff (-5x-2)(-9x+4) = 0$

$$\begin{aligned} &\iff -5x-2 = 0 \quad \text{ou} \quad -9x+4 = 0 \\ &\iff -5x = 2 \quad \text{ou} \quad -9x = -4 \\ &\iff x = -\frac{2}{5} \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

0 possède donc 2 antécédents par g : $\frac{4}{9}$ et $-\frac{2}{5}$.