Correction 1

1. Graphiquement, on obtient :
   - Le nombre dérivée de la fonction f en -1 vaut -1.
   - Le nombre dérivée de la fonction f en 1 a pour valeur 1.

2. - Déterminons l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

     Graphiquement, on a les valeurs suivantes :
     $f(2)=2 \quad ; \quad f'(2)=2$

     Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour équation réduite :
     $$y = f'(2)\cdot\big(x-2\big)+f(2)$$
     $$y = 2\cdot(x-2)+2$$
     $$y = 2x-4+2$$
     $$y = 2x-2$$
   - La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse est une tangente horizontale passant par le point de coordonnées $(5\,;1)$. On en déduit l'équation réduite de cette tangente :
     $y=1$

Correction 2

1. (a.) - $u(1) = a+\dfrac{b}{1}+\dfrac{c}{1^2} = a+b+c$
   - $u(4) = a+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{4^2} = a+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{16}$

   (b.) On a les limites suivantes :
   $$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} a = a\\ \displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{b}{x} = 0\\ \displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{c}{x^2} = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\mapsto+\infty} u(x) = a$$

   (c.) La droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_u$ en $+\infty$:
   $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} u(x) = 1$

   On en déduit : $a=1$

   L'expression de u est de la forme :
   $$u(x) = 1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$$
   Utilisons que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points A et B :
   - $A\in\mathscr{C}_u$:
     $$u(1)=0$$
     $$1+\frac{b}{1}+\frac{c}{1^2}=0$$
     $$1+b+c=0$$
   - $B\in\mathscr{C}_u$:
     $$u(4)=0$$
     $$1+\frac{b}{4}+\frac{c}{4^2}=0$$
     $$1+\frac{b}{4}+\frac{c}{16}=0$$
     $$16+4\cdot b+c=0$$

   On obtient le système suivant :
   $$\left\{\begin{array}{rcl} b+c+1 &=& 0\\ 4\cdot b+c+16 &=& 0\end{array}\right.$$
   Par soustraction des deux équations :
   $$b-4\cdot b+1-16=0$$
   $$-3\cdot b-15=0$$
   $$-3\cdot b=15$$
   $$b=-5$$
   De la première ligne :
   $$b+c+1=0$$
   $$(-5)+c+1=0$$
   $$c-4=0$$
   $$c=4$$
   Ainsi, la fonction u admet pour expression :
   $$u(x) = a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2} = 1+\frac{-5}{x}+\frac{4}{x^2} = \frac{x^2-5\cdot x+4\cdot x^2}{x^2}$$

2. Le polynôme définissant le numérateur de u a pour discriminant :
   $\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-5)^2-4\times1\times4 = 25-16 = 9$

   On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

   Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :
   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)-3}{2\times1} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
   $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} = \frac{-(-5)+3}{2\times1} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
   Le coefficient du terme du second degré étant positif, la fonction u, donc la fonction f' admet pour tableau de signe :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Variation de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Correction 3

1. L'ensemble de définition de la fonction f est :
   $\mathcal{D}_f = \big[-4\,;4\big[\backslash\big\{1\big\}$

2. L'ensemble de dérivabilité de la fonction f est l'ensemble :
   $\mathcal{D}'_f = \big[-4\,;4\big[\backslash\Big\{-2\,;-1\,;1\,;\dfrac{3}{2}\Big\}$

3. Graphiquement, on a les limites suivantes :

   (a.) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^-} f(x) = 1$ (b.) $\displaystyle\lim_{x\mapsto-2^+} f(x) = \frac{1}{2}$

   (c.) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$ (d.) $\displaystyle\lim_{x\mapsto1^+} f(x) = 2$

4. (a.) Il existe deux nombres a, -2 et 1, tels que :
   $\displaystyle\lim_{x\mapsto a^-} f(x) \neq \lim_{x\mapsto a^+} f(x)$

   (b.) Graphiquement au point d'abscisse a vérifiant la condition précédente, la courbe présente une "*coupure*" ;

elle ne peut être tracé d'un seul coup de crayon : on dira que la courbe n'est pas continue en ce point.

Correction 4

La fonction admettant la fonction φ comme fonction dérivée est la fonction h. On élimine les fonctions f et g pour les raisons suivantes :

- La fonction φ est négative sur $\big[-4\,;-2\big]$; ainsi, la fonction recherchée doit être décroissante sur $\big[-4\,;-2\big]$: on élimine ainsi, la fonction f.
- L'image de 0 par la fonction φ est 1 ; ainsi, la courbe de la fonction recherchée doit admettre en 0 une tangente dont le coefficient directeur est 1 : on élimine la courbe de la fonction g.

Correction 5

1. a. La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$g'(x) = -8{\times}3{\cdot}x^2 + 4 = -24{\cdot}x^2 + 4$

qui admet pour forme factorisée :

$$= -24\Big(x^2 - \frac{1}{6}\Big) = -24\Big(x + \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)\Big(x - \frac{1}{\sqrt{6}}\Big)$$

On en déduit que le polynôme du second degré définissant la fonction g' admet pour racine :

$\mathcal{S} = \Big\{-\frac{1}{\sqrt{6}}\,;\frac{1}{\sqrt{6}}\Big\}$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, on en déduit le tableau de signe de la fonction g' et par conséquence le tableau de variations de la fonction g :

x	-∞		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$+\infty$
Signe de g'		-	0	+	0	-	
Variation de g	$+\infty$	↘	$-5,1$	↗	$-2,9$	↘	-∞

b. On a :

$g(-1) = -8{\times}(-1)^3 + 4{\times}(-1) - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

Ainsi, le tableau de variations de la fonction g peut s'exprimer par :

x	-∞	-1	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$+\infty$
Variation de g	$+\infty$	0	$\sim -5{,}1$	$\sim -2{,}9$	-∞

On remarque que :

- Sur l'intervalle $\big]-\infty\,;-1\big]$, la fonction f admet pour minimum 0 : la fonction f est positive sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $\big[-1\,;+\infty\big[$, la fonction f admet pour maximum 0 : la fonction f est négative ou nulle sur cet intervalle. Plus précisemment, elle est strictement négativement sur $\big]-1\,;+\infty\big[$.

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2. a. Le polynôme du second degré $2x^2{+}2x{+}3$ admet pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = 2^2 - 4{\times}2{\times}3 = 4 - 24 = -20$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucune racine.

On en déduit que le dénominateur du quotient définissant la fonction f ne s'annule jamais. L'ensemble de définition de la fonction f est :

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

b. Pour $x{\neq}0$, on a les transformations algébriques :

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{\big(2x^2+2x+3\big)^2} = \frac{x^2{\cdot}\Big(2+\dfrac{1}{x^2}\Big)}{\Big[x^2{\cdot}\Big(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\Big)\Big]^2}$$

$$= \frac{x^2{\cdot}\Big(2+\dfrac{1}{x^2}\Big)}{x^4{\cdot}\Big(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\Big)^2} = \frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{x^2{\cdot}\Big(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\Big)^2}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} 2+\frac{1}{x^2} = 2 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} x^2{\cdot}\Big(2+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\Big)^2 = +\infty$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{x^2{\cdot}\Big(2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\Big)^2} = 0$$

De même, on en déduit la limite :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$

c. La fonction f est définie par le quotient de la fonction u par la fonction v où :

$u(x) = 2x^2 + 1 \quad ; \quad v(x) = \big(2x^2+2x+3\big)^2$

Déterminons l'expression des fonctions dérivées de ces deux fonctions :

- $u'(x) = 2{\times}(2x) = 4x$
- La fonction v est définie comme le carré de la fonction w où :

$w(x) = 2x^2 + 2x + 3 \quad ; \quad w'(x) = 2{\times}2x + 2 = 4x + 2$

Ainsi, la formule de dérivation du carré d'une fonction permet d'obtenir l'expression de v' :

$v'(x) = 2{\cdot}w'(x){\cdot}w(x) = 2{\cdot}(4x+2){\cdot}\big(2x^2+2x+3\big)$

$= (8x+4){\cdot}\big(2x^2+2x+3\big)$

La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{4x \cdot \big(2x^2+2x+3\big)^2 - \big(2x^2+1\big) \cdot (8x+4) \cdot \big(2x^2+2x+3\big)}{\Big[\big(2x^2+2x+3\big)^2\Big]^2}$$

$$= \frac{\big(2x^2+2x+3\big) \cdot \Big[4x \cdot \big(2x^2+2x+3\big) - \big(2x^2+1\big) \cdot (8x+4)\Big]}{\big(2x^2+2x+3\big)^4}$$

$$= \frac{4x \cdot \big(2x^2+2x+3\big) - \big(2x^2+1\big) \cdot (8x+4)}{\big(2x^2+2x+3\big)^3}$$

$$= \frac{8x^3+8x^2+12x - \big(16x^3+8x^2+8x+4\big)}{\big(2x^2+2x+3\big)^3}$$

$$= \frac{8x^3+8x^2+12x-16x^3-8x^2-8x-4}{\big(2x^2+2x+3\big)^3}$$

$$= \frac{-8x^3+4x-4}{\big(2x^2+2x+3\big)^3}$$

d. On remarque que l'expression de la fonction f' peut s'écrire :

$$f'(x) = \frac{-8x^3+4x-4}{\big(2x^2+2x+3\big)^3} = \frac{g(x)}{\big(2x^2+2x+3\big)^3}$$

Le polynôme $2x^2+2x+3$ a un discriminant strictement négatif et son coefficient du terme du second degré est positif : ce polynôme est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f' est du même signe que $g(x)$.

x	-∞		-1		$+\infty$
Signe de f'		+	0	-	
Variation de f	0	↗	0,333	↘	0

e. D'après le tableau de variation, la fonction f admet pour minorant le nombre 0 : la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		+	