Exercice 1

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=1 \quad ; \quad u_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot u_n+n-2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que, pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n=\frac{25}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{3}{2}\cdot n-\frac{21}{4}$$

2. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel n par $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k$. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

3. On considère la suite $\left(L_n\right)$ définie par :
$$L_n=\frac{S_n}{n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$
Déterminer la valeur de la limite de la suite $\left(L_n\right)$.