Correction 1

Soit z un nombre complexe quelconque. Il existe deux nombres réels a et b tels que le nombre complexe z admette l'écriture algébrique :

$$z = a + \mathrm{i}{\cdot}b$$

Ainsi, le nombre z' admet pour expression :

$$\begin{aligned} z' &= \big(a+\mathrm{i}{\cdot}b\big)^2 + 4{\cdot}\big(a+\mathrm{i}{\cdot}b\big) + 3 \\ &= a^2 + 2{\cdot}a{\cdot}\mathrm{i}{\cdot}b + b^2{\cdot}\mathrm{i}^2 + 4{\cdot}a + 4{\cdot}\mathrm{i}{\cdot}b + 3 \\ &= a^2 + 2{\cdot}a{\cdot}\mathrm{i}{\cdot}b - b^2 + 4{\cdot}a + 4{\cdot}\mathrm{i}{\cdot}b + 3 \\ &= \big(a^2 + 4{\cdot}a - b^2 + 3\big) + \mathrm{i}{\cdot}\big(2{\cdot}a{\cdot}b + 4{\cdot}b\big) \end{aligned}$$

Ainsi, pour que z' soit un nombre réel, il faut que sa partie imaginaire soit nulle :

$$2{\cdot}a{\cdot}b + 4{\cdot}b = 0$$
$$2{\cdot}b{\cdot}\big(a+2\big) = 0$$

Or, un produit étant nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul, on en déduit que le nombre z doit vérifier une de ses conditions :

$$a = -2 \quad ; \quad b = 0$$

Ainsi : $\mathcal{E} = \big\{ a+\mathrm{i}{\cdot}b \;\big|\; a=-2 \text{ et } b=0 \big\}$

Géométriquement, dans le plan complexe, l'ensemble $\mathcal{E}$ est la réunion de la droite d'équation $x=-2$ et $y=0$.

Correction 2

Notons $x+i{\cdot}y$ l'écriture algébrique du nombre z. Ainsi, le nombre complexe z' admet l'écriture algébrique :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{\big(x+\mathrm{i}{\cdot}y\big)^2+1} = \frac{1}{x^2 + 2{\cdot}x{\times}\mathrm{i}{\cdot}y + \big(\mathrm{i}{\cdot}y\big)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\mathrm{i} - y^2 + 1} = \frac{1}{\big(x^2 - y^2 + 1\big) + 2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\mathrm{i}} \\ &= \frac{1{\cdot}\big[\big(x^2-y^2+1\big) - 2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\mathrm{i}\big]}{\big[\big(x^2-y^2+1\big) + 2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\mathrm{i}\big]\big[\big(x^2-y^2+1\big) - 2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\mathrm{i}\big]} \\ &= \frac{\big(x^2-y^2+1\big) - 2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\mathrm{i}}{\big(x^2-y^2+1\big)^2 + \big(2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\mathrm{i}\big)^2} \\ &= \frac{x^2-y^2+1}{\big(x^2-y^2+1\big)^2 + \big(2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\big)^2} - \frac{2{\cdot}x{\cdot}y}{\big(x^2-y^2+1\big)^2 + \big(2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\mathrm{i}\big)^2}{\cdot}\mathrm{i} \end{aligned}$$

Ainsi, pour z' soit un nombre réel, il faut que :

$$Im(z') = 0$$
$$-\frac{2{\cdot}x{\cdot}y}{\big(x^2-y^2+1\big)^2 + \big(2{\cdot}x{\cdot}y{\cdot}\big)^2} = 0$$

Si un quotient est nul alors son numérateur est nul :

$$-2{\cdot}x{\cdot}y = 0$$

Or, un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :

$$x=0 \quad ; \quad y=0$$

La proposition vraie est 3..

Correction 3

1. a. La relation étudiée s'écrit :

$$|z - 2 + \mathrm{i}| = 5$$
$$\big|z - (2 - \mathrm{i})\big| = 5$$

Notons I le point d'affixe $2-i$; la relation précédente précise l'égalité de longueur :

$$IM = 5$$

Ainsi, l'ensemble des points M vérifiant la relation est le cercle de centre I et de rayon 5.

b. En notant $a+i{\cdot}b$ l'écriture algébrique de l'affixe du point M, on a :

$$\begin{aligned} \big|z - 2 + \mathrm{i}\big| &= 5 \\ \big|(a+\mathrm{i}{\cdot}b) - 2 + \mathrm{i}\big| &= 5 \\ \big|(a-2) + \mathrm{i}{\cdot}(b+1)\big| &= 5 \\ \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2} &= 5 \\ (a-2)^2 + (b+1)^2 &= 25 \\ a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 &= 25 \\ a^2 + b^2 - 4a + 2b &= 20 \end{aligned}$$

Cette expression est l'équation cartésienne d'un cercle.

2. a. En notant respectivement P et Q les points d'affixes $-i$ et $-1+2{\cdot}\mathrm{i}$, la relation (F) devient :

$$\begin{aligned} |z + \mathrm{i}| &= |z + 1 - 2{\cdot}\mathrm{i}| \\ \big|z - (-\mathrm{i})\big| &= \big|z - (-1 + 2{\cdot}\mathrm{i})\big| \\ PM &= QM \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des points M est l'ensemble des points équidistants des points P et Q : c'est la médiatrice du segment $[PQ]$.

b. En notant $a+i{\cdot}b$ l'écriture algébrique de l'affixe du point M, la relation (F) s'écrit alors en fonction de a et de b :

$$\begin{aligned} \big|z + \mathrm{i}\big| &= \big|z + 1 - 2{\cdot}\mathrm{i}\big| \\ \big|(a+\mathrm{i}{\cdot}b) + \mathrm{i}\big| &= \big|(a+\mathrm{i}{\cdot}b) + 1 - 2{\cdot}\mathrm{i}\big| \\ \big|a + \mathrm{i}{\cdot}(b+1)\big| &= \big|(a+1) + \mathrm{i}{\cdot}(b-2)\big| \\ \sqrt{a^2 + (b+1)^2} &= \sqrt{(a+1)^2 + (b-2)^2} \end{aligned}$$

Les deux termes sous les radicaux sont des sommes positives :

$$\begin{aligned} a^2 + (b+1)^2 &= (a+1)^2 + (b-2)^2 \\ a^2 + b^2 + 2{\cdot}b + 1 &= a^2 + 2{\cdot}a + 1 + b^2 - 4{\cdot}b + 4 \\ -2{\cdot}a + 6{\cdot}b - 4 &= 0 \end{aligned}$$

On remarque que cette équation est l'équation cartésienne d'une droite.

