

### Exercice 1

On donne le nombre complexe:  $j = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation:

$$z^2 + z + 1 = 0$$

2. Démontrer les égalités suivantes:

a.  $j^3 = 1$       b.  $j^2 = -1 - j$

3. On suppose l'existence de trois nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$  vérifiant l'égalité:

$$a + j \cdot b + j^2 \cdot c = 0$$

- a. Démontrer l'égalité:  $a - c = j \cdot (c - b)$   
b. Démontrer l'égalité:  $a - b = j^2 \cdot (b - c)$

### Correction 1

1. Le polynôme  $z^2 + z + 1$  admet pour discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme admet les racines complexes suivantes:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2 \cdot a} & z_2 &= \frac{-b + i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2 \cdot a} \\ &= \frac{-1 - i \cdot \sqrt{-(-3)}}{2 \times 1} & &= \frac{-1 + i \cdot \sqrt{-(-3)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-1 - i \cdot \sqrt{3}}{2} & &= \frac{-1 + i \cdot \sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i & &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \end{aligned}$$

2. a. On a:

$$\begin{aligned} j^3 &= \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i + \left(i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i + i^2 \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i - \frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i - \frac{3}{4} \cdot i^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 \end{aligned}$$

- b. D'après la question 1. a.:

$$j^2 + j + 1 = 0$$

$$j^2 = -1 - j$$

3. a.  $a + j \cdot b + j^2 \cdot c = 0$

D'après la question 2. b.:

$$a + j \cdot b + (-1 - j) \cdot c = 0$$

$$a + j \cdot b - c - j \cdot c = 0$$

$$a - c = -j \cdot b + j \cdot c$$

$$a - c = j \cdot (c - b)$$

- b. On a:

$$a + j \cdot b + j^2 \cdot c = 0$$

$$j \cdot (a + j \cdot b + j^2 \cdot c) = j \cdot 0$$

$$j \cdot a + j^2 \cdot b + j^3 \cdot c = 0$$

D'après la question 2. a.:

$$j \cdot a + (-1 - j) \cdot b + 1 \cdot c = 0$$

$$j \cdot a - b - j \cdot b + c = 0$$

$$j \cdot a - j \cdot b = b - c$$

$$j \cdot (a - b) = b - c$$

$$j^3 \cdot (a - b) = j^2 \cdot (b - c)$$

D'après les questions 2. b.:

$$a - b = j^2 \cdot (b - c)$$

