BACCALAURÉAT BLANC DU LYCÉE PRÉVERT.

SESSION DE JANVIER 2015

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : **S**

OBLIGATOIRE

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES (8h – 12h)

COEFFICIENT : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

La dernière page Annexe est à rendre avec la copie

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

(Une seule calculatrice sur la table et changement uniquement en cas de panne de piles !)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 Étude d'une famille de fonctions 6 points

A tout entier naturel n non nul on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{4\,e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\dfrac{4\,e^{x}}{e^{x}+7}$

1. a) Démontrez que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

b) Démontrez que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrez que pour tout réel x , $0<f_1(x)<4$.

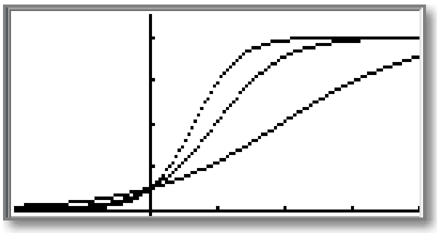
2. a) Déterminez les coordonnées de I_1 , intersection de la droite **(d)** d'équation $y=2$ et de la courbe C_1

b) Déterminez une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1

3. a) Montrez que pour tout réel $m\in]0;4[$, l'équation $f_1(x)=m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.
On notera a cette solution.

b) Déterminez l'expression exacte de a en fonction de m .

Partie B : Étude de certaines propriétés de f_n



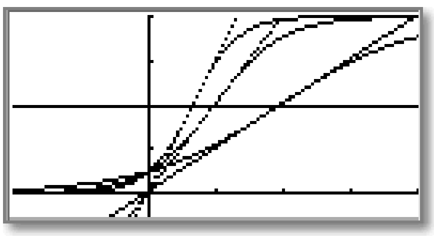
1. Matthieu ayant étudié f_1 , et ayant affiché sur l'écran de sa calculatrice C_1 , C_2 et C_3 , voir ci-contre, fait les conjectures suivantes :

- Quelque soit n , entier naturel non nul, les courbes C_n admettent les mêmes asymptotes
- Ces courbes semblent toutes passer par le point $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.
- Les fonctions f_n semblent être strictement croissantes.

Validez les conjectures de Matthieu.

2. a) Montrez que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera les coordonnées. On note I_n ce point.

b) Déterminez une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n .



c) Matthieu affiche les tangentes (T_1) , (T_2) et (T_3) et constate que ces tangentes semblent concourir en un même point proche de l'origine O du repère.
Montrez que les tangentes (T_n) sont concourantes c'est à dire qu'elles se rencontrent toutes en un même point.

EXERCICE 2 Nombres complexes. Forme algébrique. 4 points

Les trois questions suivantes sont indépendantes

Question 1

Démontrer de deux façons différentes que, quelque soit le nombre complexe z, le nombre $(z-\mathbf{i})(\overline{z}+\mathbf{i})$ est un réel positif.

Question 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^2-\overline{z}$ où z est un nombre complexe de forme algébrique $z=x+\mathbf{i}\,y$, x et y étant deux réels.

a. Exprimer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=2$

Question 3

On considère l'équation (E) : $z^4=-4$ où z est un nombre complexe.

a. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

b. On considère le nombre complexe $z_0=1+\mathbf{i}$.

Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) en calculant z_0^2 puis z_0^4.

c. Déduire des deux questions précédentes les trois autres solutions de l'équation (E). Justifiez.

EXERCICE 3 Étude d'une suite 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par $f(x)=5-\dfrac{4}{x+2}$

On a tracé en annexe dans un repère orthonormé la courbe C représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y=x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle [0 ; +∞ [. On note α la solution.

On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Sur la figure de l'annexe, **en utilisant la courbe C et la droite D**, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

(On laissera les traits de construction bien visibles sur le graphique)

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ où α est le réel défini dans la question 2.

b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel *n*, on définit la suite (S_n) par $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\cdots+u_n$.

a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

b. Écrire en langage naturel un algorithme qui affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n entrée par l'utilisateur.

*On utilisera une boucle **Tant que** ou une boucle **Pour***

EXERCICE 4 . Probabilités 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.

Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

— à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I ou X puis il rejoint le point O

— les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I

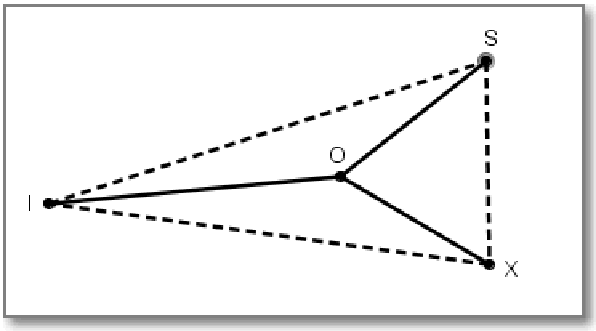
— les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres

— on ne tient pas compte des passages par O

Exemple de trajet complet pour un robot :

Départ de O, passage par S, retour en O, passage par X, retour en O, passage par S , retour en O.

Ce trajet peut être résumé par S -X - S



Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$

2. On note E l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre».

Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.

3. On note F l'événement : «au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque» . Déterminer la probabilité de F.

Partie B - Deux robots

Deux robots se trouvent au point O. Leurs déplacements sont indépendants.

Quelle est la probabilité que les deux robots passent successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre ?

Partie C – Une équipe de robots !

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement :

« au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre» soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Annexe à compléter et à rendre avec la copie pour l'exercice 3

Nom et prénom : ....Classe TS ......