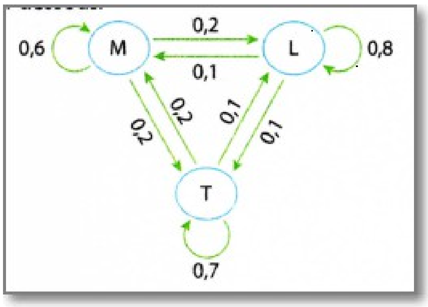
EXERCICE 4 Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité. 5 points

Partie A : Matrices

Une agence de location

On considère une agence de locations de voitures qui a trois succursales, une à Marseille (M), une à Toulouse (T) et une à Lyon (L).

La redistribution des voitures d'un début de mois au début du suivant est indiquée par le graphe ci-dessous.



1. Interpréter les flèches partant de M et les probabilités indiquées le long de ces flèches.

2. Écrire la matrice de transition A dont le coefficient $a_{i,j}$ est la probabilité de passer de l'état i à l'état j (L correspondant à l'état 1, M à l'état 2, T à l'état 3).

3. À un début de mois donné, noté mois 0, il y a 600, 500, 400 véhicules respectivement à L, M,T.

On représente cette répartition par une matrice ligne R = $(600 \quad 500 \quad 400)$.

a. Calculer RA. Que représente cette matrice ? Expliquer.

b. Calculer RA^2 . Quelle répartition peut-on prévoir au bout de deux mois ? de trois mois ?

Partie B : Arithmétique

On se propose de déterminer les couples (n, m) d'entiers naturels **non nuls** vérifiant la relation (F) : $7^n - 3 \times 2^m = 1$.

1. On suppose $m \leqslant 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant $m \geqslant 5$.

a. Montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 32)

b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4.

c. En déduire que si le couple (n, m) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1$ (mod 5).

d. La relation $7^n - 3 \times 2^m = 1$ et le résultat $7^n \equiv 1$ (mod 5) sont-ils compatibles ?

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).