Corrigé du Bac blanc du lycée Prévert. Session de janvier 2015. Durée 4 h.

EXERCICE 1 Étude d'une famille de fonctions 6 points

A tout entier naturel n non nul on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\dfrac{4\,e^{nx}}{e^{nx}+7}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=\dfrac{4\,e^{x}}{e^{x}+7}$

1. a) Démontrez que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera les équations.

Nous devons déterminer les limites de f_1 en $-\infty$ et $+\infty$.

En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=0$ car de la forme « $\dfrac{4\times 0}{0+7}$ »

Donc en $-\infty$ C_1 admet une première asymptote horizontale : la droite d'équation $y=0$.

En $+\infty$, nous avons une forme indéterminée « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » donc nous factorisons le dénominateur par e^x puis simplifions pour lever l'indétermination :

$f_1(x)=\dfrac{4\,e^{x}}{e^{x}(1+7\,e^{-x})}=\dfrac{4}{1+7\,e^{-x}}$ **. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=4$ car de la forme « $\dfrac{4}{1+7\times 0}$ »**

Donc en $+\infty$ C_1 admet une deuxième asymptote horizontale : la droite d'équation $y=4$.

b) Démontrez que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Nous utilisons la formule de dérivation $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$f'_1(x)=\dfrac{4e^x(e^x+7)-4\,e^x\times e^x}{(e^x+7)^2}=\dfrac{28\,e^x}{(e^x+7)^2}$, or pour tout x réel, $e^x>0$ donc, pour tout x réel, $f'_1(x)>0$.

f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Démontrez que pour tout réel x, $0<f_1(x)<4$.

$f_1(x)=\dfrac{4\,e^x}{e^x+7}>0$ **puisque, pour tout x réel, $e^x>0$.**

D'autre part la résolution de $\dfrac{4\,e^x}{e^x+7}<4$ équivaut à $\dfrac{e^x}{e^x+7}<1$ qui équivaut à $e^x<e^x+7$ c'est à dire $0<7$, ce qui est vrai quelque soit x donc nous avons bien : pour tout réel x, $0<f_1(x)<4$

2. a) Déterminez les coordonnées de I_1, intersection de la droite **(d)** d'équation $y=2$ et de la courbe C_1

Nous devons résoudre l'équation $\dfrac{4\,e^x}{e^x+7}=2$ qui équivaut à $4\,e^x=2\,e^x+14 \Leftrightarrow 2\,e^x=14 \Leftrightarrow e^x=7$

d'où $x=\ln(7)$ d'où les coordonnées du point d'intersection $I_1(\ln(7);2)$

b) Déterminez une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1

Nous connaissons la forme générale d'une tangente à C_1 au point d'abscisse a :

$y=f_1'(a)(x-a)+f_1(a)$ ici $a=\ln(7)$. Calculons $f_1(\ln(7))$ et $f'_1(\ln(7))$

$f_1(\ln(7))=\dfrac{4\,e^{\ln 7}}{e^{\ln 7}+7}=\dfrac{4\times 7}{7+7}=\dfrac{28}{14}=2$

$f'_1(\ln 7)=\dfrac{28\,e^{\ln 7}}{(e^{\ln 7}+7)^2}=\dfrac{28\times 7}{(7+7)^2}=\dfrac{28\times 7}{14\times 14}=1$

donc une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1 est : $y=1(x-\ln(7))+2$ c'est à dire $y=x+2-\ln(7)$.

3. a) Montrez que pour tout réel $m\in]0;4[$, l'équation $f_1(x)=m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On notera a cette solution.

Le tableau de variation de f_1 permet de comprendre :

x	$-\infty$	a	$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		+	
Variations de f_1	0	m ↗	4

• f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$

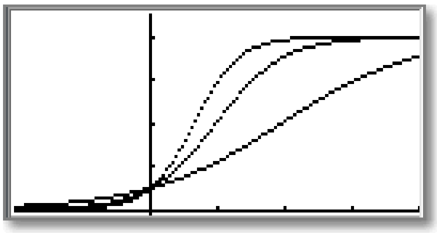
• f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

• $m\in]0;4[$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_1(x)=m$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$

b) Déterminez l'expression exacte de a en fonction de m .

On résout $\dfrac{4e^x}{e^x+7}=m$ qui équivaut à $4e^x=me^x+7m\Leftrightarrow(4-m)e^x=7m\Leftrightarrow e^x=\dfrac{7m}{(4-m)}$, $m\in]0;4[$ donc l'expression $\dfrac{7m}{(4-m)}$ est bien strictement positive.Nous appliquons la fonction logarithme pour obtenir la solution $a=\ln\left(\dfrac{7m}{4-m}\right)$

Partie B : Étude de certaines propriétés de f_n



1. Matthieu ayant étudié f_1, et ayant affiché sur l'écran de sa calculatrice C_1, C_2 et C_3, voir ci-contre, fait les conjectures suivantes :

- Quelque soit n, entier naturel non nul, les courbes C_n admettent les mêmes asymptotes
- Ces courbes semblent toutes passer par le point $A(0;\frac{1}{2})$.
- Les fonctions f_n semblent être strictement croissantes.

Validez les conjectures de Matthieu.

• Pour les asymptotes, nous reprenons la même démarche que pour f_1

Nous devons déterminer les limites de $f_n(x)=\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$ en $-\infty$ et $+\infty$, quelque soit n entier naturel non nul.

En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{nx}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)=0$ car de la forme « $\dfrac{4\times 0}{0+7}$ »

Donc en $-\infty$ C_n admet une asymptote horizontale : la droite d'équation $y=0$.

En $+\infty$, nous avons une forme indéterminée « $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ » donc nous factorisons le dénominateur par e^{nx} puis simplifions pour lever l'indétermination :

$f_n(x)=\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}(1+7e^{-nx})}=\dfrac{4}{1+7e^{-nx}}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-nx}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=4$ car de la forme « $\dfrac{4}{1+7\times 0}$ »

Donc en $+\infty$ C_n admet une asymptote horizontale : la droite d'équation $y=4$.
Quelque soit n, entier naturel non nul, les courbes C_n admettent les mêmes asymptotes horizontales que C_1

• Calculons $f_n(0)$ quelque soit $n \geqslant 1$

$f_n(0)=\dfrac{4e^0}{e^0+7}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ **. Ceci montre que le point $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à toutes les courbes C_n**

• Dérivation de f_n

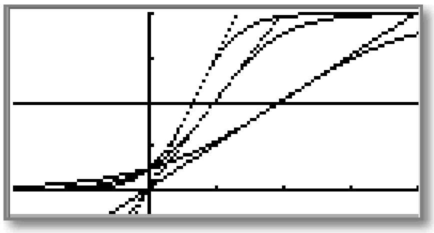
$f'_n(x)=\dfrac{4ne^{nx}(e^{nx}+7)-4e^{nx}\times ne^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}=\dfrac{28ne^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$ **, expression strictement positive sur $\mathbb{R}$ quelque soit $n \geqslant 1$**

Donc les fonctions f_n sont strictement croissantes.

2. a) Montrez que pour tout entier naturel n non nul la courbe C_n et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera les coordonnées. On note I_n ce point.

on résout $f_n(x)=2$

$\dfrac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}=2$ qui équivaut à $4e^{nx}=2e^{nx}+14 \Leftrightarrow 2e^{nx}=14 \Leftrightarrow e^{nx}=7$



d'où $nx=\ln(7) \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln(7)}{n}$ d'où les coordonnées du point d'intersection $I_n\left(\dfrac{\ln(7)}{n};2\right)$

b) Déterminez une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n.

Calculons $f_n\left(\dfrac{\ln(7)}{n}\right)$ et $f'_n\left(\dfrac{\ln(7)}{n}\right)$

$$f_n\left(\frac{\ln(7)}{n}\right)=\frac{4e^{n\frac{\ln(7)}{n}}}{e^{n\frac{\ln(7)}{n}}+7}=\frac{4\times 7}{7+7}=2$$

$$f'_n\left(\frac{\ln(7)}{n}\right)=\frac{28ne^{n\frac{\ln(7)}{n}}}{\left(e^{n\frac{\ln(7)}{n}}+7\right)^2}=\frac{28n\times 7}{14\times 14}=n$$

Une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n est donc

$y=n\left(x-\dfrac{\ln(7)}{n}\right)+2=nx-\ln(7)+2$ **,**

c) Matthieu affiche les tangentes (T_1), (T_2) et (T_3) et constate que ces tangentes semblent concourir en un même point proche de l'origine O du repère.

Montrez que les tangentes (T_n) sont concourantes c'est à dire qu'elles se rencontrent toutes en un même point.

Les tangentes (T_n) ont toutes la même ordonnée à l'origine : elles coupent l'axe des ordonnées au point $P(0;2-\ln(7))$ avec $2-\ln(7)\approx 0{,}05$ donc P est effectivement proche de l'origine O du repère

Les trois questions suivantes sont indépendantes

Question 1

Démontrer de deux façons différentes que, quelque soit le nombre complexe z, le nombre $(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i})$ est un réel positif.

Méthode 1 : en utilisant la propriété du cours suivante :
Pour tout $Z\in\mathbb{C}$: $Z\bar{Z}=X^2+Y^2$ est un réel positif , où $Z=X+\mathrm{i}Y$, X et Y réels.
Ici, $Z=z-\mathrm{i}$, $\bar{Z}=\bar{z}+\mathrm{i}$ et $(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i})$ = $Z\bar{Z}$ est bien un réel positif

Méthode 2 : on pose $z=x+\mathrm{i}y$ et on développe :
$(z-\mathrm{i})(\bar{z}+\mathrm{i})=(x+\mathrm{i}y-\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y+\mathrm{i})=x^2+y^2-y-y+1+\mathrm{i}(-xy+x+xy-x)=x^2+y^2-2y+1=x^2+(y-1)^2$
Le résultat est bien un nombre réel positif quelque soit z

Question 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^2-\bar{z}$ où z est un nombre complexe de forme algébrique $z=x+\mathrm{i}y$, x et y étant deux réels.

a. Exprimer en fonction de x et de y la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

$f(z)=z^2-\bar{z}=(x+\mathrm{i}y)^2-(x-\mathrm{i}y)=x^2+2\mathrm{i}xy-y^2-x+\mathrm{i}y=x^2-y^2-x+\mathrm{i}(y+2xy)$

La partie réelle de $f(z)$ est donc x^2-y^2-x et sa partie imaginaire $y+2xy=y(1+2x)$

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=2$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales :

$f(z)=2$ **équivaut à** $\begin{cases} x^2-y^2-x=2 \\ y(1+2x)=0 \end{cases}$ **ceci équivaut à** (S_1) $\begin{cases} x^2-y^2-x=2 \\ y=0 \end{cases}$ **ou** (S_2) $\begin{cases} x^2-y^2-x=2 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$

(S_1) **équivaut à** $\begin{cases} x^2-x-2=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2)=0 \\ y=0 \end{cases}$ **qui donne deux solutions réelles** $z_1=-1$ **correspondant à** $(x=-1\,;y=0)$ **et** $z_2=2$ **correspondant à** $(x=2\,;y=0)$

(S_2) **équivaut à** $\begin{cases} \dfrac{1}{4}-y^2+\dfrac{1}{2}=2 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{-5}{4} \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{cases}$ **or y est un réel donc y^2 est un nombre positif donc (S_2) n'a pas de solutions**

Conclusion : l'équation $f(z)=2$ a deux solutions réelles $z_1=-1$ et $z_2=2$

Question 3

On considère l'équation (E) : $z^4=-4$ où z est un nombre complexe.

a. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).

si $z^4=-4$ alors $(-z)^4=(z)^4=-4$ donc – z est aussi solution de (E)
si $z^4=-4$ alors $\overline{z^4}=\overline{-4}$ or $\overline{z^4}=(\overline{z})^4$ donc $(\overline{z})^4=-4$ donc $\overline{z}$ est aussi solution de (E)

b. On considère le nombre complexe $z_0=1+i$.

Montrer que z_0 est solution de l'équation (E) en calculant z_0^2 puis z_0^4 .

$z_0^2=(1+i)^2=1+2i-1=2i$ donc $z_0^4=(2i)^2=4i^2=-4$ donc z_0 est solution de (E)

c. Déduire des deux questions précédentes les trois autres solutions de l'équation (E). Justifiez.

On en déduit que $-z_0$ et $\overline{z_0}$ sont aussi solutions de (E), ainsi que $\overline{(-z_0)}$
donc les quatre solutions de (E) sont $1+i$; $-1-i$; $1-i$; $-1+i$

EXERCICE 3 **Étude d'une suite** **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; +∞ [par $f(x)=5-\dfrac{4}{x+2}$

On a tracé en annexe dans un repère orthonormé la courbe C représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y=x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle [0 ; +∞ [.

f est dérivable sur [0 ; +∞ [.

On utilise la formule de dérivation $\left(\dfrac{1}{u(x)}\right)'=\dfrac{-(u(x))'}{(u(x))^2}$ **avec** $u(x)=x+2$ **et** $u'(x)=1$

$f'(x)=0-4\times\dfrac{-1}{(x+2)^2}=\dfrac{4}{(x+2)^2}>0$ **sur** $[0;+\infty[$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur l'intervalle [0 ; +∞ [. On note α la solution.

On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On résout dans $[0;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$:

$f(x)=x$ équivaut à $5-\dfrac{4}{x+2}=x$ .On réduit au même dénominateur $\dfrac{5(x+2)-4-x(x+2)}{x+2}=0$ ce qui équivaut à $\dfrac{5x+10-4-x^2-2x}{x+2}=0\Leftrightarrow\dfrac{-x^2+3x+6}{x+2}=0$. Or $\dfrac{A}{B}=0\Leftrightarrow A=0 \text{ et } B\neq 0$

Sur $[0;+\infty[$, $x+2>0$ donc $f(x)=x$ équivaut à $-x^2+3x+6=0$

On résout cette équation du second degré en calculant son discriminant. $\Delta=9-4\times 6\times(-1)=33>0$.

Les deux solutions réelles sont donc $\dfrac{-3-\sqrt{33}}{-2}=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$

La deuxième solution est négative donc l'unique solution de l'équation $f(x)=x$ dans l'intervalle $[0;+\infty[$ est $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\approx 4{,}37$

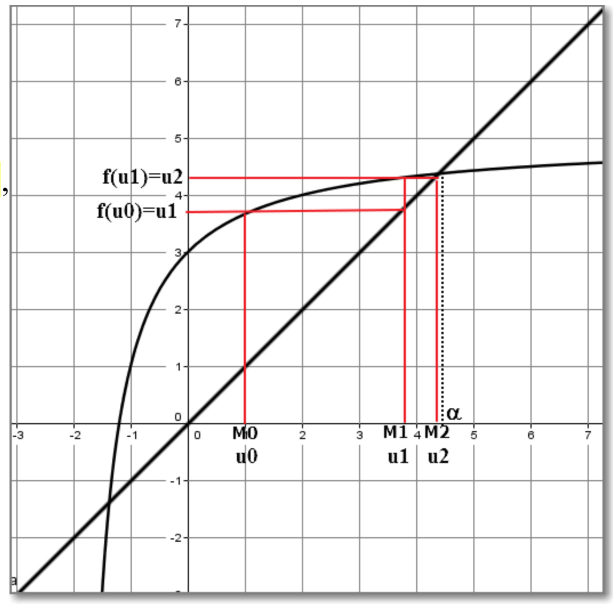
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$.

Sur la figure de l'annexe, **en utilisant la courbe C et la droite D**, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

(On laissera les traits de construction bien visibles sur le graphique)

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

Voici la construction ci-contre :



On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et converge rapidement vers α.

4. a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$ où α est le réel défini dans la question 2.

Soit la proposition $P(n)$: $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$

• Initialisation

Pour $n=0$, cette proposition s'écrit $0\leqslant u_0\leqslant u_1\leqslant\alpha$ or $u_0=1$ et $u_1=f(u_0)=5-\dfrac{4}{1+2}=\dfrac{11}{3}\approx 3{,}7$

On a $0\leqslant 1\leqslant\dfrac{11}{3}\leqslant\alpha$: la proposition est vraie au rang 0.

• Hérédité

Supposons la proposition vraie à un rang n donné , $n\geqslant 0$, autrement dit supposons que $0\leqslant u_n\leqslant u_{n+1}\leqslant\alpha$, montrons

qu'alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.
Preuve :
On sait d'après la question 1 que la fonction f est strictement croissante sur [0; +∞ [, cette fonction conserve donc l'ordre sur les positifs : donc si $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ alors $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ or $f(0)=3$, $f(u_n)=u_{n+1}$ et $f(u_{n+1})=u_{n+2}$.
De plus, α est solution de l'équation $f(x)=x$ donc $f(\alpha)=\alpha$.
On a donc $0 \leqslant 3 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$: l'hérédité est vérifiée.
• Conclusion
La proposition est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc, d'après l'axiome de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .
On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

D'après ce qui précède la suite (u_n) est croissante et majorée par α.
Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

5. Pour tout entier naturel *n*, on définit la suite (S_n) par $S_n=\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0+u_1+\cdots+u_n$.

a. Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

$S_0=u_0=1$; $S_1=u_0+u_1=1+\frac{11}{3}=\frac{14}{3}$ ≈ 4,67 ; $S_2=u_0+u_1+u_2=S_1+u_2$; $u_2=f(u_1)=f\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{73}{17}$

donc $S_2=\frac{14}{3}+\frac{73}{17}=\frac{457}{51}$ ≈ 8,96

b. Écrire en langage naturel un algorithme qui affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n entrée par l'utilisateur.

*On utilisera une boucle **Tant que** ou une boucle **Pour***

Les variables sont les réels U et S et les entiers naturels k et N.

Boucle Pour

```
Entrée :          Saisir le nombre entier naturel N
Initialisation :  U prend la valeur 1
                  S prend la valeur U
Traitement :      Pour k allant de 1 à N
                    Affecter à U la valeur 5 − 4/(U+2)
                    Affecter à S la valeur S + U
                  Fin Pour
Sortie :          Afficher S
```

Boucle Tant Que

```
Entrée :          Saisir le nombre entier naturel N.
Initialisation :  U prend la valeur 1
                  S prend la valeur U
                  k prend la valeur 0
Traitement :      Tant que k < N
                    Affecter à k la valeur k + 1
                    Affecter à U la valeur 5 − 4/(U+2)
                    Affecter à S la valeur S + U
                  Fin Tant que
Sortie :          Afficher S
```

EXERCICE 4 . Probabilités 5 points

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Des robots se trouvent au centre de gravité O d'un triangle de sommets S, I et X.

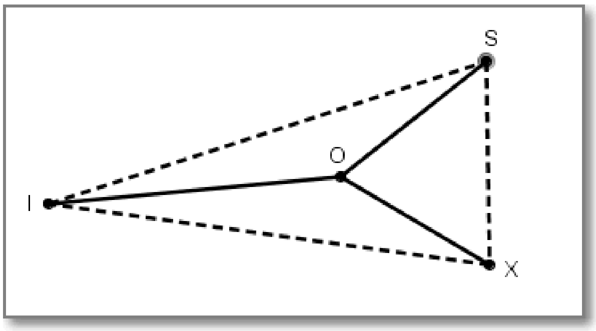
Chacun se déplace en trois étapes successives de la manière suivante :

— à chaque étape, il passe par l'un des trois sommets S, I ou X puis il rejoint le point O

— les robots sont programmés de telle sorte que, lors d'une étape, la probabilité de passer par le sommet S est égale à celle de passer par le sommet X et la probabilité de passer par le sommet S est le double de celle de passer par le sommet I

— les différentes étapes sont indépendantes les unes des autres

— on ne tient pas compte des passages par O



Exemple de trajet complet pour un robot :

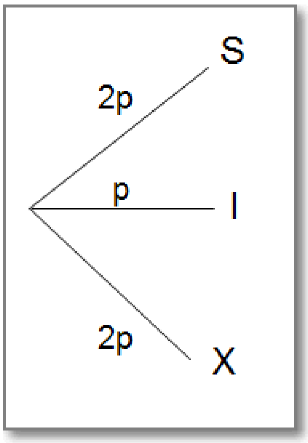
Départ de O, passage par S, retour en O, passage par X, retour en O, passage par S , retour en O.

Ce trajet peut être résumé par S -X - S

Partie A - Un seul robot

Un seul robot se trouve au point O.

1. Démontrer qu'à chaque étape, la probabilité que le robot passe par le sommet I est égale à $\frac{1}{5}$



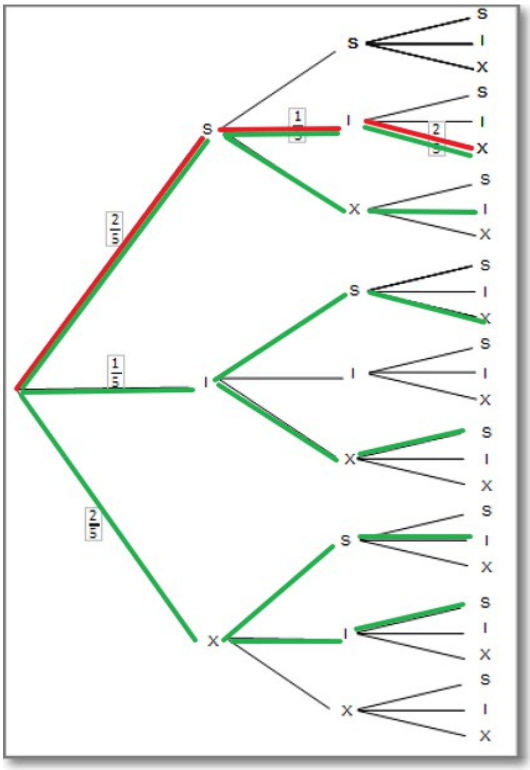
Pour chaque étape, l'arbre ci-contre traduit la situation décrite par l'énoncé :
Si l'on note p la probabilité de passer par le sommet I, alors la probabilité de passer par le sommet S est égale à $2p$ ainsi que la probabilité de passer par le sommet X.
D'après la loi des probabilités totales :

$P(S)+P(X)+P(I)=1$ donc $2p+2p+p=1$ donc $5p=1$ c'est à dire $p=\frac{1}{5}=0{,}2$.

On en déduit que $P(S)=P(X)=\frac{2}{5}$.

2. On note E l'événement : « au cours des trois étapes, le robot passe successivement par les 3 sommets S, I et X dans cet ordre».

Démontrer que la probabilité de E est égale à $\frac{4}{125}$.



L'arbre ci-contre indique tous les chemins possibles pour un robot
L'événement E est réalisé par un seul chemin S – I – X (*en rouge*).
Les trois étapes étant indépendantes les unes des autres :

$$P(E)=P(S)\times P(I)\times P(X)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{125}.$$

3. On note F l'événement : «au cours des trois étapes, le robot passe exactement par les 3 sommets S, I et X dans un ordre quelconque» . Déterminer la probabilité de F.

La probabilité de F est la somme des probabilités de parcourir les « chemins » : S-I-X, S-X-I, I-S-X, I-X-S, X-S-I et X-I-S(*en vert*)
Comme on l'a vu à la question précédente la probabilité de parcourir l'un de ces chemins est égale à $\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{125}$, donc

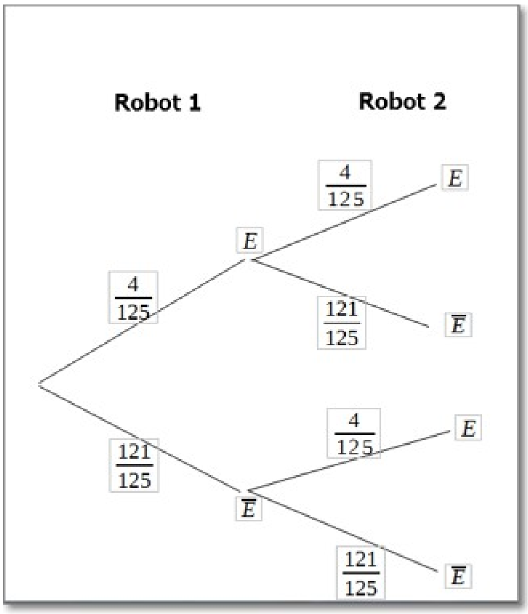
finalement $P(F)=6\times\frac{4}{125}=\frac{24}{125}=0{,}192$.

Partie B - Deux robots

Deux robots se trouvent au point O. Leurs déplacements sont indépendants.

Quelle est la probabilité que les deux robots passent successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre ?

Soit E l'événement « le robot parcourt le chemin S-I-X ». Nous avons vu que $P(E)=\frac{4}{125}$



L'arbre ci-contre modélise la situation puisque les déplacements des deux robots sont indépendants donc la probabilité cherchée est $P(E)\times P(E)=\left(\frac{4}{125}\right)^2=\frac{16}{15625}$

Partie C – Une équipe de robots !

Des robots se trouvent au point O, leurs déplacements étant indépendants les uns des autres.

Quel nombre minimal n de robots doit-il y avoir pour que la probabilité de l'événement :

« au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre» soit supérieure ou égale à 0,99 ?

La probabilité qu'un robot ne passe pas par les sommets S, I et X dans cet ordre est d'après les questions précédentes : $P(\overline{E})=1-\frac{4}{125}=\frac{121}{125}$, donc la probabilité qu'aucun des n robots ne passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est $\left(\frac{121}{125}\right)^n$

La probabilité qu'au moins un robot passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est donc $1-\left(\frac{121}{125}\right)^n$.

Il faut donc résoudre : $1-\left(\frac{121}{125}\right)^n\geqslant 0{,}99$. Ceci équivaut à $\left(\frac{121}{125}\right)^n\leqslant 0{,}01$.

On applique la fonction logarithme népérien qui respecte l'ordre sur les nombres strictement positifs .

De plus $\ln(a^n)=n\ln a$ pour tout réel $a>0$ donc $n\ln\left(\frac{121}{125}\right)\leqslant \ln 0{,}01$

or $0<\frac{121}{125}<1$ donc $\ln\left(\frac{121}{125}\right)<0$ donc $n\ln\left(\frac{121}{125}\right)\leqslant \ln 0{,}01$ équivaut à $n\geqslant\frac{\ln(0{,}01)}{\ln\left(\frac{121}{125}\right)}\approx 141{,}6$

Il faut donc au minimum 142 robots pour que la probabilité de l'événement :
« au moins l'un des robots passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre» soit supérieure ou égale à 0,99