Nom : .... **Prénom** : .... **T°S**

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 5

MERCREDI 17 MAI 2017 / 1h45 minutes / Calculatrice autorisée.

===========> RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE <===========

EXERCICE 1

environ 40 minutes

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle[1] de paramètre λ, où λ ∈ ℝ et $\lambda > 0$.
On sait que $\mathrm{p}(\mathrm{X} \leqslant 2) = 0{,}15$.
Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

2. a) Démontrer que pour tout réel t strictement positif : $p(\mathrm{X} \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

b) Déterminer la valeur exacte de $\mathrm{p}(\mathrm{X} \geqslant 3)$.

c) Montrer que pour tous réels positifs t et h : $\mathrm{p}_{\mathrm{X} \geqslant t}(\mathrm{X} \geqslant t + h) = p(\mathrm{X} \geqslant h)$.

d) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans?

e) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

3. Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3} .
L'entreprise annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1%.
Afin de vérifier cette affirmation, 800 moteurs sont prélevés au hasard : on constate que 15 moteurs sont détectés défectueux. Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise ? Justifier.
On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

EXERCICE 2

environ 25 minutes

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante. Elle souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.
On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1{,}2$.
Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante.
En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X, sans modifier son espérance $\mu = 50$.
On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.
On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\dfrac{\mathrm{X} - 50}{\sigma'}$.

1 Cet exercice est tiré d'un Bac… Une loi exponentielle pour la durée de vie d'un moteur ? O_O
Mais bien sûr… Comme si un moteur avait une durée de vie sans vieillissement…

a) Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z.

b) Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $p(Z \leqslant u) = 0{,}06$.

c) En déduire la valeur attendue de σ' .

3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.
On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

a) On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres (justifier).

b) Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

EXERCICE 3 *environ 40 minutes*

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = 5\,\mathrm{e}^{-x} - 3\,\mathrm{e}^{-2x} + x - 3$.

On note C_f la représentation graphique de la fonction f et D la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : positions relatives de C_f et D

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x-3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x positif : $g(x) > 0$.

2. La courbe C_f et la droite D ont-elles un point commun? Justifier.

Partie B : étude de la fonction *g*

On note M le point d'abscisse x de la courbe C_f , N le point d'abscisse x de la droite D et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN.

1. Justifier que, pour tout x positif, la distance MN est égale à $g(x)$.

2. a) Montrer que la fonction g possède un maximum que l'on déterminera.

b) En donner une interprétation graphique précise.

Partie C : étude d'une aire

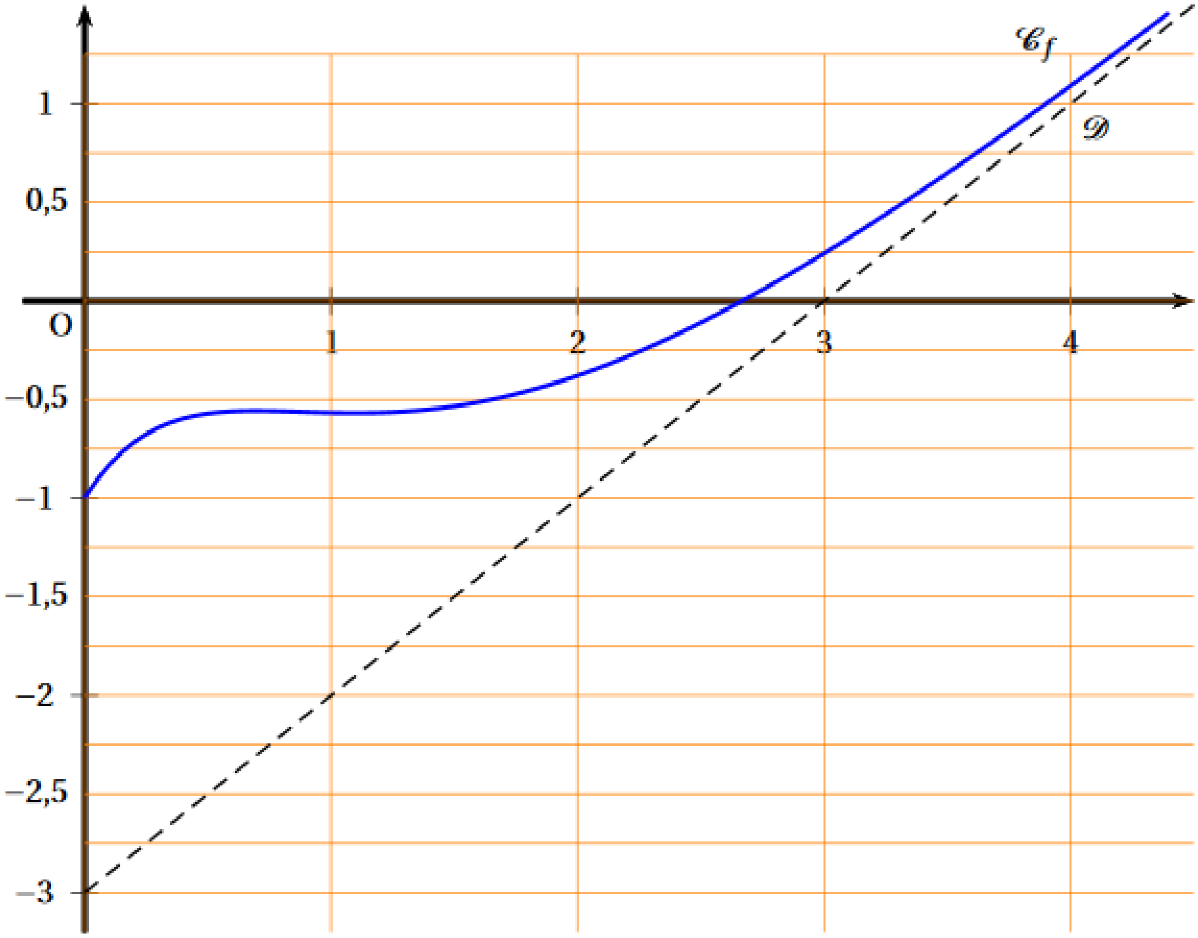
On considère la fonction A définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $\mathrm{A}(x) = \int_0^x (f(t) - (t-3))\,\mathrm{d}t$

1. Hachurer sur le graphique de la page suivante le domaine dont l'aire est donnée par $\mathrm{A}(2)$.

2. Justifier que la fonction A est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

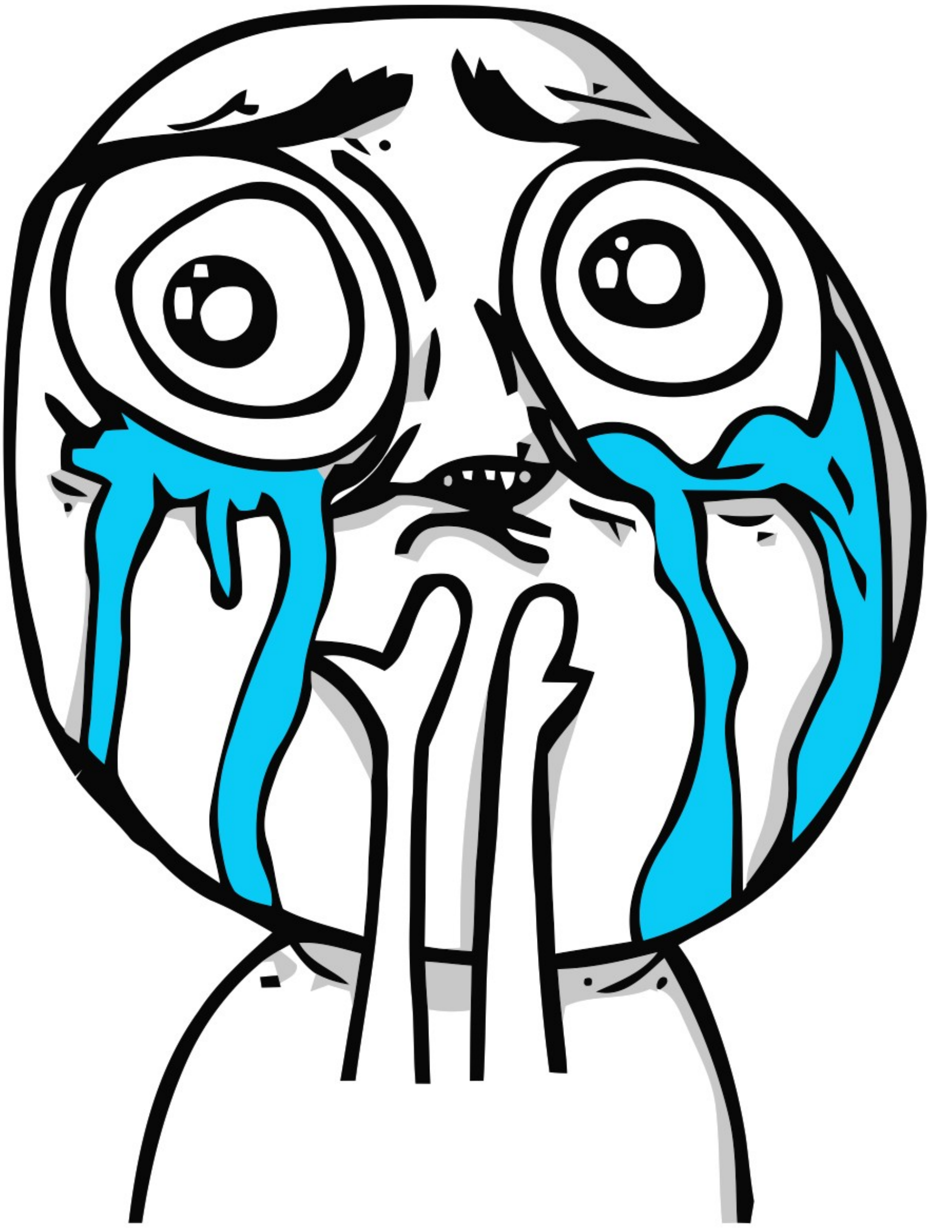
3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $\mathrm{A}(x)$.

4. Existe-t-il une valeur de x telle que $\mathrm{A}(x) = 2$? Si oui, la déterminer.



$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{D}$
1
0,5
O
1
2
3
4
−0,5
−1
−1,5
−2
−2,5
−3

Ceci était votre dernier devoir de mathématiques…



ADIEU les littéraires !

« Cet après-midi, je suis entré par mégarde au Collège de France, dans une salle où le prof écrivait au tableau noir des formules de hautes mathématiques. Pendant une heure, j'ai regardé avec une stupeur admirative ce magicien qui ne cessa de faire surgir des signes merveilleux et, pour moi, parfaitement inintelligibles. [...] S'adonner à une activité inaccessible aux profanes, à une activité qui ne peut être suivie que par quelques-uns, qu'on peut compter sur les doigts, oh, c'est cela que j'aurais aimé faire. [...] »

Emil CIORAN