Nom : .... **Prénom** : .... **T°S**

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE DEDANS

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 4

MERCREDI 14 MARS 2018

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème par exercice (**note <u>sur 30</u>**) est donné à titre indicatif.
Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice.
Si vous le suivez, il vous restera alors 5 min.

EXERCICE 1 — env. 45 min — 13,5 points

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma. On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est : $f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}$, avec $t \in [0\,;\,+\infty[$.
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\,\mu$g.L^{-1}.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitie de la concentration initiale.
   Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.
2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.
   Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (µg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est : $g(t) = 20\left(\mathrm{e}^{-0,1t} - \mathrm{e}^{-t}\right)$, avec $t \in [0\,;\,+\infty[$.
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0\,\mu$g.L^{-1}.

1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :
   $g'(t) = 20\mathrm{e}^{-t}\left(1 - 0,1\mathrm{e}^{0,9t}\right)$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
   En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre $t_{0,5}$ qui a été calculé en A - 1.
Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de 20μg.L^{-1}.
On note u_n la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la n-ième injection.
Ainsi, $u_1 = 20$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$.
On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit 20 μg.L^{-1}, est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit $f(0)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse 38 μg.L^{-1}.
   Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.

EXERCICE 2 env. 45 min 13,5 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f et interpréter graphiquement le résultat.
2. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f(x) = 4\left(\dfrac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2$.

   b. En déduire que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x)\big(2 - \ln(x)\big)}{x^2}$.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs du nombre réel x strictement positif.

   c. Calculer $f(1)$ et $f\left(e^2\right)$.

   On obtient alors le tableau de variations ci-dessous.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	0

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α sur $]0\,;\,+\infty[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

EXERCICE 3 `env. 10 min` **3 points**

Dans un cube ABCDEFGH, on note I et J les points respectifs de [BC] et [EH] tels que :

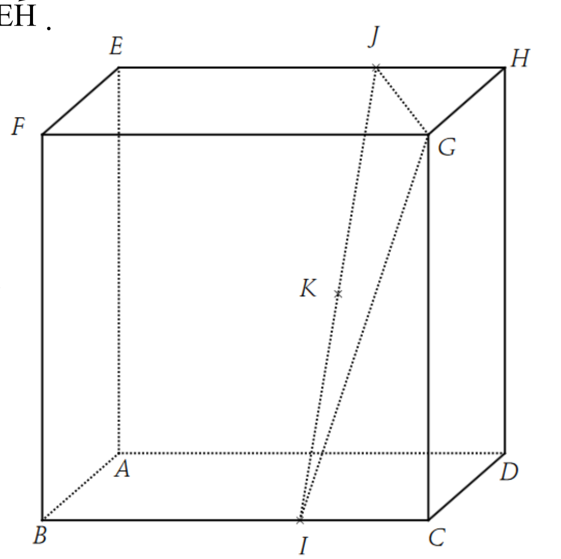
$$\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{EJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}.$$

On note K le milieu de [IJ].

<u>On admet</u> que : - le triangle FIJ est isocèle en F.
- (GK) et (IJ) sont orthogonales.

1. Démontrer que (IJ) est orthogonale au plan (FGK).

2. Les plans (FGK) et (IJG) sont-ils perpendiculaires ? Justifier.



EXERCICE BONUS `env. 5 min` **2 points**

ABCD est un tétraèdre.
I, J et K sont des points des faces ACD, ABD et BCD.
Construire ci-dessous la trace de la section du tétraèdre par le plan (IJK).

Aide gratuite de votre maître vénéré : le plan (AIJ) peut vous aider temporairement...