Nom : .... **Prénom** : .... **T°S**

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 3

MERCREDI 7 FÉVRIER 2018

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème par exercice (**note <u>sur 30</u>**) est donné à titre indicatif.
Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice.
Si vous le suivez, il vous restera alors 20 min.

EXERCICE 1 — env. 20 min — 7 points

Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f(x)=\dfrac{3}{4+6\,\mathrm{e}^{-2x}}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x)=0{,}5$ admet une unique solution sur ℝ.

2. On note α cette solution. Donner, <u>sans justifier</u>, un encadrement de α au millième.

EXERCICE 2 — env. 45 min — 13 points

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel *n*, par :

$$z_0=1 \text{ et } z_{n+1}=\left(1+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)z_n .$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n .

1. a) Déterminer la forme exponentielle de z_1 .

b) En déduire z_2 sous forme exponentielle.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel *n* : $z_n=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}$.

b) Pour quelles valeurs de *n*, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés?

3. Pour tout entier naturel *n*, on pose $d_n=|z_{n+1}-z_n|$.
<u>On admet</u> que : $d_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $z_{n+2}-z_{n+1}=\left(1+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1}-z_n)$.

a) Interpréter géométriquement d_n .

b) Démontrer que la suite (d_n) est géométrique puis que pour tout entier naturel *n*, $d_n=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$.

4. a) Montrer que pour tout entier naturel *n*, $|z_{n+1}|^2=|z_n|^2+d_n^2$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_n .

EXERCICE 3 env. 15 min **5,5 points**

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40% des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25% des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0;1]$.

Par ailleurs, 20% des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;
J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la valeur exacte de x.

3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.
On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. On en donnera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 95 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

EXERCICE 4 env. 10 min **4,5 points**

1. Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$.
Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.