Nom : .... **Prénom** : ....

T°S

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 2

MERCREDI 14 NOVEMBRE 2018

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème par exercice (**sur 20**) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.
Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice.
Si vous le suivez, il vous restera alors 15 min.

EXERCICE 1 (≈ 2 points) *ROC 'n' roll* env. 10 min

Démontrer que, pour tout nombre complexe z : $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$.

EXERCICE 2 (≈ 2,5 points) *No limit* env. 10 min

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n=\left(\frac{4}{5}\right)^n-\sqrt{5n+1}$.

2. Déterminer la limite éventuelle de la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $x_n=\frac{4n^4-3n^3-2}{3n^3+2n^2-4}$.

EXERCICE 3 (≈ 7,5 points) *Les lois de l'attraction* env. 35 min

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0=10$, avec $f(x)=\frac{1}{2}x^2-9x+\frac{99}{2}$.

1. a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire le tableau de signes de f.

2. a) Démontrer, par récurrence sur n, que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 9\leqslant u_n<11$.

b) Déterminer les racines réelles du polynôme $f(x)-x$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}(u_n-9)(u_n-11)$.

d) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

3. La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 9, on admet qu'elle converge donc vers un réel noté m qui vérifie : $f(m)=m$. En utilisant la question 2.b), déduire vers quel réel la suite (u_n) converge.

→

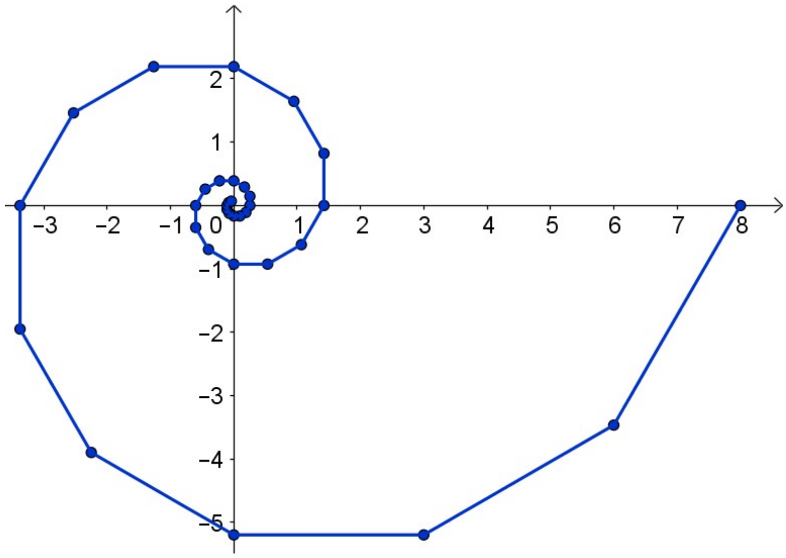
EXERCICE 4 (≈ 8 points) *La spirale* env. 40 min

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On pose $z_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1}=\frac{3-i\sqrt{3}}{4}z_n .$$

On note A_n le point du plan d'affixe z_n.



1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $z_n=8\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{4}\right)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=OA_n$. Autrement dit : $u_n=|z_n|$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

b) En déduire (sans justifier) la nature de (u_n).

c) Déterminer la limite de (u_n).

3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel k : $\frac{z_{k+1}-z_k}{z_{k+1}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}i$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel k, on a : $A_kA_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}$.

c) Pour tout entier naturel n, on appelle l_n la longueur de la ligne brisée reliant dans cet ordre les points A_0, A_1, A_2, … , A_n. On a ainsi : $l_n=A_0A_1+A_1A_2+...+A_{n-1}A_n$.
Démontrer que la suite (l_n) est convergente et calculer sa limite.

Pour ceux qui ont terminé (et ont donc 20 / 20), méditez sur ces deux citations du livre *De l'inconvénient d'être né*, publié en 1973 par le génial philosophe roumain Emil Cioran. Dans cet ouvrage, il livre, sous forme d'aphorismes fragmentés, des opinions concernant l'absurdité de la condition humaine.

> « Comme je me promenais à une heure tardive dans cette allée bordée d'arbres, une châtaigne tomba à mes pieds. Le bruit qu'elle fit en éclatant, l'écho qu'il suscita en moi, et un saisissement hors de proportion avec cet incident infime, me plongèrent dans le miracle, dans l'ébriété du définitif, comme s'il n'y avait plus de questions, rien que des réponses. J'étais ivre de mille évidences inattendues, dont je ne savais que faire…
> C'est ainsi que je faillis toucher au suprême. Mais je crus préférable de continuer ma promenade. »

> « Ce qui rend les mauvais poètes plus mauvais encore, c'est qu'ils ne lisent que des poètes (comme les mauvais philosophes ne lisent que des philosophes), alors qu'ils tireraient un plus grand profit d'un livre de botanique ou de géologie. On ne s'enrichit qu'en fréquentant des disciplines étrangères à la sienne. Cela n'est vrai, bien entendu, que pour les domaines où le *moi* sévit. »