Fonctions : généralités. Exercices.

Correction 1

La courbe $\mathscr{C}_g$ n'est pas la représentation d'une fonction car on voit facilement que l'image de 1 a deux possibilités.

Correction 2

Une fonction associe à un nombre de son ensemble de définition **une et eune seule image**. Ainsi pour toute courbe représentative d'une fonction, deux points ne peuvent avoir la même abscisse.

Ainsi, les courbes représentées à la question b. et d. ne peuvent être des courbes représentatives de fonctions.

Correction 3

1. a. Graphiquement, on a les images suivantes :
$f(-3)=3$; $f(-1)=2$; $f(0)=1{,}5$
$f(3)=0$; $f(5)=-1$

b.
- f admet un unique antécédent du nombre 3 qui est -3 :
$f(-3)=3$
- Il existe un unique antécédent du nombre 2,5 par f :
$f(-2)=2{,}5$
-2 est l'unique antécédent par la fonction f du nombre 2,5.
- L'unique antécédent du nombre 0 par la fonction f est 3 :
$f(0)=3$
- La fonction f admet un unique antécédent du nombre -1 ; cet antécédent est 5.

2. a. A l'aide de la fonction g, voici les images de quelques nombres :
$g(-3)=-1{,}5$; $g(-2)=0$; $g(-1)=2$
$g(1)=3g(3)=2$; $g(4)=3$

b. La fonction g admet un unique antécédent du nombre $-1{,}5$; ce nombre est -3 :
$g(-3)=-1{,}5$

c. Le nombre 2 admet trois antécédent par la fonction g :
-1 ; 1 ; 3

d. Le nombre 1 admet deux antécédents par la fonction g :
$g(-1{,}5)=1$; $g(2)=1$

Correction 4

1. 4 a pour image 2 par la fonction f.
2. -1 est un antécédent de 2 par g
3. La courbe représentative passe par le point de coordonnée $\left(\sqrt{2}\,;-1\right)$
4. 3 est un antécédent du nombre -5 par la fonction j.

Correction 5

1. a. $f(2)=3\times2+5=6+5=11$
L'image par la fonction f de 2 est 11

b. $g(1)=-2\times1-2=-2-2=-4$
L'image par la fonction g de 1 est -4

c. $h(5)=5^2=25$
L'image par la fonction h de 5 est 25

d. $j(-3)=3\times(-3)^2=3\times9=27$
L'image par la fonction j de 5 est -3

e. $k(2)=\dfrac{3\times2+1}{2+1}=\dfrac{7}{3}$
L'image par la fonction k de 2 est $\dfrac{7}{3}$

f. $\ell(1)=\dfrac{2\times1-2}{x+\pi}=0$
L'image par la fonction ℓ de 2 est 0

2. a. Pour connaître l'ensemble des antécédents de -1 pour la fonction f, nous devons résoudre l'équation suivante :
$$f(x)=-1$$
$$3x+5=-1$$
$$x=-2$$
Le nombre -1 possède un unique antécédent par la fonction f : -2.

b. Résolvons l'équation suivante :
$$g(x)=8$$
$$-2x-2=8$$
$$x=-5$$
Le nombre 8 possède -5 comme unique antécédent pour la fonction g.

c. L'équation $x^2=9$ possède deux solutions : 3 et -3.
Le nombre 9, pour la fonction h, l'ensemble des antécédents suivants :
$\left\{3\,;-3\right\}$

d. Pour connaître les antécédents du nombre -1 pour la fonction j, nous devons résoudre l'équation suivante :
$$j(x)=-1$$
$$3x^2=-1$$
$$x^2=-\frac{1}{3}$$
Un carré ne pouvant pas être négatif, l'ensemble des antécédents de -1 est l'ensemble vide $\varnothing$.

e. Résolvons l'équation suivante :
$$k(x)=1$$
$$\frac{3x+1}{x+1}=1$$
$$3x+1=x+1$$
$$2x=2$$
$$x=1$$
Le nombre 1 possède un antécédent par la fonction k : 1

f. Résolvons l'équation suivante :
$$\ell(x)=2$$
$$\frac{2x+2}{x+\pi}=2$$
$$2x+2=2\times(x+\pi)$$
$$2x+2=2x+2\pi$$
$$0x=2\pi-2$$
Cette équation n'admet aucune solution car $2\pi-2$ est

 BY-NC

un nombre non-nul ; le nombre 2 ne possède pas d'antécédent par la fonction ℓ.

Correction 6

1.
- $f(1) = (1+1)(1-1^2) = 2(1-1) = 2\times 0 = 0$
- $g(1) = \dfrac{(1+1)^2}{1-2} = \dfrac{2^2}{-1} = \dfrac{4}{-1} = -4$
- $h(1) = 3 - 2\cdot(1+1) = 3 - 2\times 2 = 3 - 4 = -1$

2.
- $j(x) = -1$

  $\dfrac{1}{1-x} = -1$

  Utilisons le produit en croix :

  $1 = -1\times(1-x)$

  $1 = -1 + x$

  $x = 1 + 1$

  $x = 2$

  2 est l'antécédent du nombres -1 par la fonction j.
- $k(x) = -1$

  $\dfrac{x^2 - x + 1}{x+1} = -1$

  D'après le produit en croix :

  $x^2 - x + 1 = -1\cdot(x+1)$

  $x^2 - x + 1 = -x - 1$

  $x^2 + 2 = 0$

  La fonction k n'admet pas d'antécédent pour le nombre -1.
- $\ell(x) = -1$

  $\dfrac{3\cdot x - 1}{2 - 3\cdot x} = -1$

  En utilisant le produit en croix :

  $3\cdot x - 1 = -1\cdot(2 - 3\cdot x)$

  $3\cdot x - 1 = -2 + 3\cdot x$

  $0\cdot x = -1$

  La fonction ℓ n'admet pas d'antécédent par la fonction ℓ.

Correction 7

a. L'ensemble de définition de la fonction définie par la courbe représentative est $]-5\,;5]$

b. Tous les nombres compris entre -5 et 4 *(exclu)* admettent une image à l'aide de cette courbe représentative. Ainsi, on a :
$\mathcal{D} = [-5\,;4[$.

c. On a : $\mathcal{D} = [-5\,;5]$

d. L'ensemble de définition de cette fonction est constitué de la réunion de deux intervalles :
$\mathcal{D} = [-5\,;-1] \cup]1\,;4[$

Correction 8

1. Aucune contrainte sur l'expression définissant l'image de x. On peut calculer l'image de n'importe quel nombre au travers de la fonction f.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

2. Une fraction n'est pas définie lorsque son dénominateur est nul ; autrement dit, la fonction g est définie sur l'ensemble des réels privés du nombre 0.
On en déduit que : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} - \{0\}$

3. Le dénominateur $2x+5$ s'annule en $-\dfrac{5}{2}$
$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

4. Le dénominateur de la fonction h est le même que la fonction j, ainsi :
$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

5. La racine d'un nombre est définie si, et seulement si, l'expression se trouvant sous le radical a une valeur positive ou nul *(c'est à dire supérieur à 0)*.
Ainsi, la fonction k est définie sur l'ensemble $[0\,;+\infty[$

6. Puisque x^2 est toujours positif ou nul, on en déduit que ℓ est définie sur $\mathbb{R}$:
$\mathcal{D}_\ell = \mathbb{R}$

7. Cherchons les valeurs pour lesquelles la fonction m est définie ; cela signifie qu'on recherche l'ensemble des valeurs telles que :

$2x + 5 \quad 0$

$2x \quad -5$

$x \quad -\dfrac{5}{2}$

L'ensemble de définition de m est $\left[-\dfrac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

8. Faisons la même étude pour la fonction n :

$-x + 2 \geqslant 0$

$-x \geqslant -2$

$x \leqslant 2$

L'ensemble de définition de n est $]-\infty\,;2]$

Correction 9

- L'image du nombre 1 par la fonction f a pour valeur :
$f(1) = 2\times 1^2 - 3\times 1 + 2 = 2\times 1 - 3 + 2$
$= 2 - 3 + 2 = 1 \neq 2$

  L'image du nombre 1 n'étant pas le nombre 2, on en déduit que le point $A\,(1\,;2)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- L'image du nombre 4 par la fonction f a pour valeur :
$f(4) = 2\times 4^2 - 3\times 4 + 2 = 2\times 16 - 12 + 2$
$= 32 - 12 + 2 = 22$

  L'image du nombre 4 ayant pour valeur 22, on en déduit que le point $B\,(4\,;22)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- L'image du nombre -1 par la fonction f a pour valeur :
$f(-1) = 2\times(-1)^2 - 3\times(-1) + 2 = 2\times 1 + 3 + 2$
$= 2 + 3 + 2 = 7 \neq 9$

  L'image du nombre -1 n'étant pas le nombre 9, on en déduit que le point $C\,(-1\,;9)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- L'image du nombre 0 par la fonction f a pour valeur :
$f(0) = 2\times 0^2 - 3\times 0 + 2 = 2\times 0 - 0 + 2$
$= 0 - 0 + 2 = 2 \neq 3$

  L'image du nombre 0 n'étant pas le nombre 3, on en déduit que le point $D\,(0\,;3)$ n'appartient pas à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Correction 10

1. On a : $f(1) = 1^2 - 6\times 1 + 2 = 1 - 6 + 2 = -3$

L'image de 1 par la fonction f est -3

2. Deux méthodes sont possibles pour calculer les antécédents de -7 par la fonction f :

- Pour obtenir l'ensemble des antécédents du nombre -7 pour la fonction f, nous devons effectuer la résolution algébrique de l'équation :

  $$x^2 - 6x + 2 = -7$$
  $$x^2 - 6x + 9 = 0$$
  $$(x-3)^2 = 0$$

  Un produit de facteur est nul si, et seulement, au moins un de ses facteurs est nul :

  3 est l'unique solution de ce système.

  Remarque : Il n'est pas toujours possible de factoriser un polynome du second degré en classe de seconde.

- La deuxième méthode est un "tatônnement" vérifiant l'image des nombres proposés comme antécédents :

  - $f(3) = 3^2 - 6\times3 + 2 = -7$
  - $f(2) = 2^2 - 6\times2 + 2 = 0$
  - $f(1) = 1^2 - 6\times1 + 2 = -3$
  - $f(-2) = (-2)^2 - 6\times(-2) + 2 = -6$

  Le seul antécédent de -7 est 3.

3. Graphiquement, l'ensemble de définition de la fonction g qui est : $\left]-4\,;7\right]$

4. Le point $\left(0\,;1\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_g$.
Ainsi, l'image de 0 par g est le nombre 1.

5. Les points $\left(-3\,;-1\right)$ et $\left(6\,;2\right)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_g$.
On remarque que :

- le point $\left(-2\,;-0{,}5\right)$ n'appartient à la courbe $\mathscr{C}_g$.
- le point $\left(-4\,;1\right)$ n'appartient pas à la courbe car le nombre -4 n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction g.

CC BY-NC