Nom : .... **Prénom** : .... **T°S**

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 1

MERCREDI 27 SEPTEMBRE 2017

Durée de l'épreuve : 1 h 50.
Calculatrice autorisée.

QUE LA FORCE SOIT AVEC VOUS

Un barème (**note sur 34**) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.
Chaque point sur 34 représente donc environ 0,6 point sur 20.

Un temps indicatif par exercice est proposé : si vous respectez les durées, il vous restera environ 10 minutes pour vous relire, etc.

PRESENTATION

0,5 pt

Résultats mal mis en valeur, très méchant sera le correcteur

EXERCICE 1 *Une suite stationnaire*

env. 10 min

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0=-\frac{5}{2}$ et :$\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2u_n^2+3u_n-4$. **4 pts (1 + 3)**

1. Calculer u_1 et u_2 en détaillant les calculs.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, $u_n=1$.

EXERCICE 2 *Tout ce qui a trait à la vache m'émeut*

env. 15 min

En 2005, un éleveur de vaches laitières commercialisait 80 mètres cubes de lait. **4 pts (1,5 + 1 + 1,5)**
Cette même année, un contrat de partenariat avec une autre société a été signé : il prévoit que cette quantité doit être réduite de 5 % par an, jusqu'en 2020.
On note u_n le nombre de litres de lait commercialisés durant l'année $2005+n$.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n : $u_n=80\,000\times 0{,}95^n$.

2. Combien de litres de lait devront être commercialisés en 2020 ? *Arrondira au litre entier le plus proche.*

3. Combien de litres de lait seront commercialisés, au total, entre l'année 2005 et l'année 2020 (incluses) ? *On arrondira au nombre entier de litres le plus proche.*

EXERCICE 3 *Une impression de déjà vu*

env. 10 min

1. Étudier le sens de variation de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\left(\frac{n}{n+2}\right)^2$. **3,5 pts (2 + 1,5)**

2. Calculer la somme suivante : $\sum_{k=1}^{97}(5k-3)$.

EXERCICE 4 *Un problème récurrent*

env. 30 min

On donne la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+1$.

11,5 pts (1 + 0,5 + 2,5 + 1 + 1 + 1,5 + 3 + 1)

1. a) A l'aide de la calculatrice, observer les 10 premiers termes de la suite (u_n).
En donner des valeurs approchées au centième, sans justifier.

b) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n).

Nous allons démontrer cette conjecture.

2. Première méthode

Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n=u_n-\frac{3}{2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

b) En déduire les variations de la suite (v_n).

c) En déduire celles de la suite (u_n).

3. Deuxième méthode

a) Démontrer que : $u_{n+1}<u_n \Leftrightarrow u_n>\frac{3}{2}$.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $u_n>\frac{3}{2}$.

c) En déduire les variations de la suite (u_n).

EXERCICE 5 *Homo(graphique) et fière de l'être*

env. 30 min

On considère la suite (u_n) définie par :

10,5 pts (2 + 1 + 2 + 2 + 1,5 + 2)

$$u_0=\frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1}=\frac{u_n+3}{2u_n} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{x+3}{2x}$.

1. La courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=x$ sont tracées page suivante.
Y représenter graphiquement les 7 premiers termes de la suite (u_n) : u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
Laisser les traits de construction.

2. a) Calculer u_1 et u_2.

b) (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-\frac{3}{2}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{2}$.

b) En déduire que : $v_n=\left(-\frac{3}{2}\right)^{n+1}$.

c) Utilisez ce résultat pour trouver l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 5 question 1