Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET
AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU MARDI 23 JANVIER 2018

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Calculatrice autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points] *Commun à tous les candidats*

Rappels :
Si le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$:

- $\arg(\overline{z})=-\arg(z)$ (modulo 2π)
- $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')$ (modulo 2π)
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$ (modulo 2π)
- $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$ (modulo 2π)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B=\overline{z_A} \text{ et } z_C=-3.$$

Partie A

1. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe

$$z'=\frac{1}{3}iz^2.$$

On note O′, A′, B′ et C′ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. **a.** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′.
   b. Placer les points A′, B′ et C′ .
   c. Démontrer l'alignement des points O, A et B′ .

2. Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

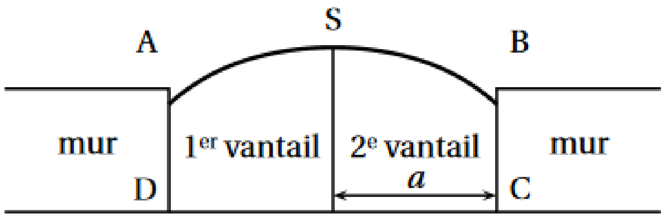
EXERCICE 2 [5 points] *Commun à tous les candidats*

On rappelle la propriété suivante :

> Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels.
> On note J l'intervalle formé de tous les réels x tels que $ax+b \in$ I .
> La fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est définie et dérivable sur J , et sa dérivée est la fonction :
> $$x \mapsto a f'(ax+b).$$

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

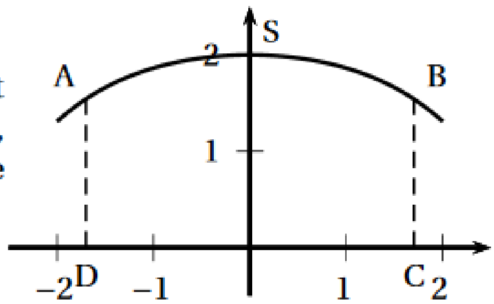
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2 ; 2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a ; f(-a))$, $(a ; f(a))$, $(a ; 0)$ et $(-a ; 0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2 ; 2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2 ; 2]$:
$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right).$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

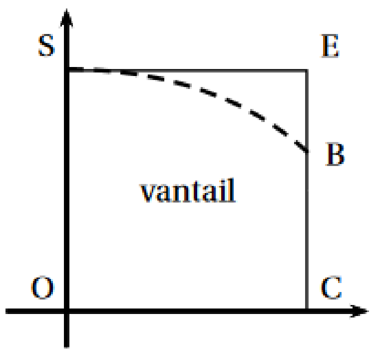
1. Justifier que $b = 1$.

2. On admet que l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0;2]$.
Déterminer une valeur approchée de a au centième (préciser rapidement votre démarche).

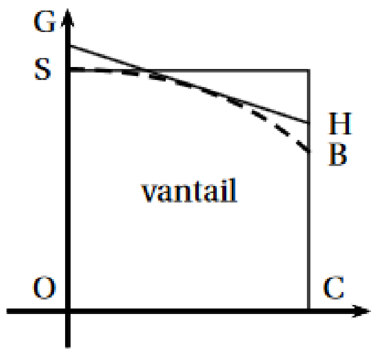
3. Dans cette question, on choisit $a=1{,}8$ et $b=1$.
On admet que l'aire d'un vantail mesure environ 33 100 cm².
Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg.
La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg/m².
Que décide le client ?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1{,}8$ et $b = 1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire} = \frac{b+B}{2} \times h.$$

EXERCICE 3 [5 points] *Commun à tous les candidats*

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. a. Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n, $a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$.

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).

EXERCICE 4 [5 points] *Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité*

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n est divisible par 6.

   On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».

   Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4. **a.** Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

   b. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

   c. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5. **a.** Vérifier que $2^4 \equiv 1\ [5]$.

   b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

   c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?

   Justifier.