Nom : .... Prénom : ....

Vous pouvez garder le sujet après l'épreuve

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU VENDREDI 13 AVRIL 2018

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Calculatrice autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [7 points] *Commun à tous les candidats*

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}$.

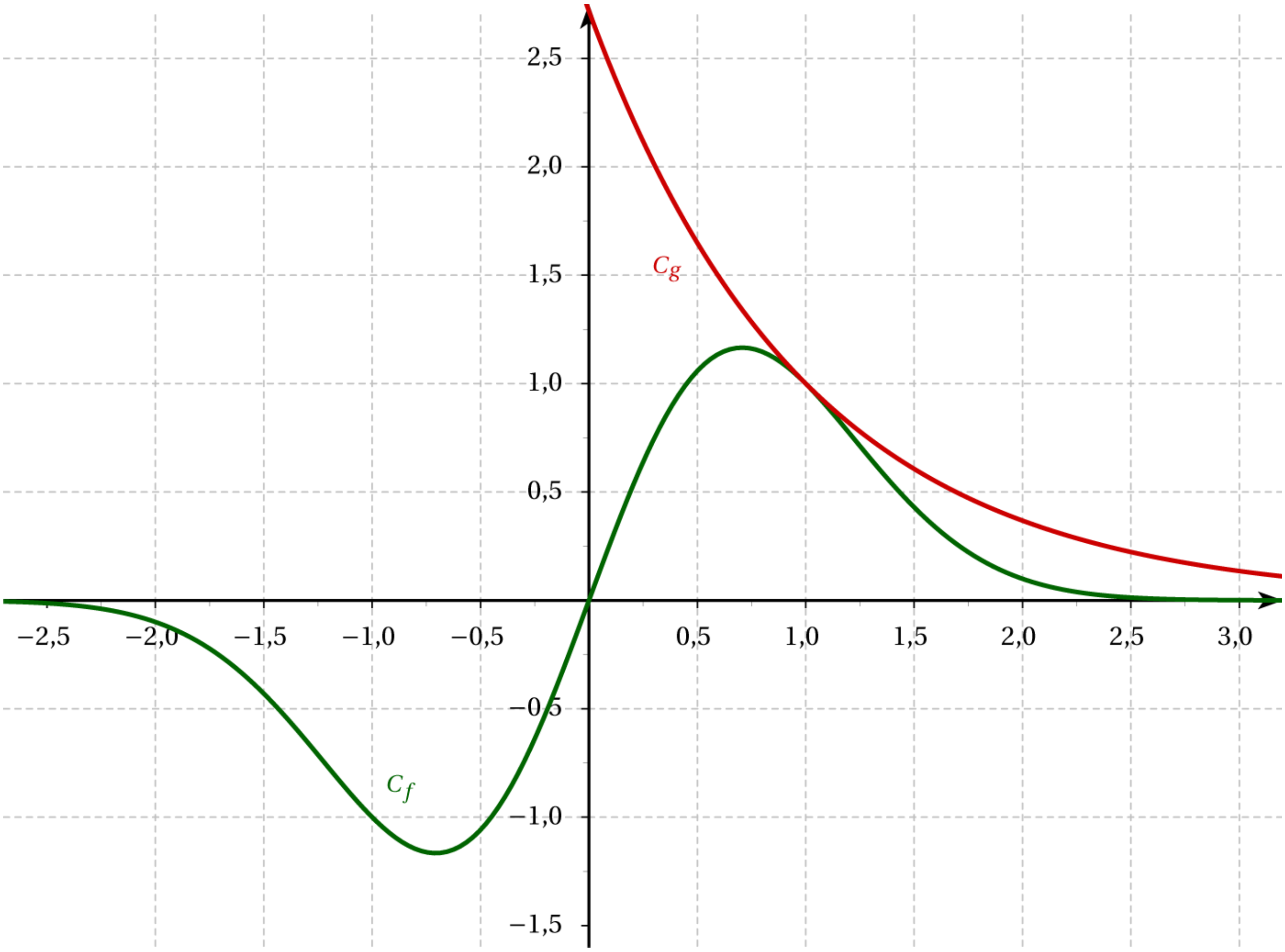
1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.

   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.

2. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
Démontrer que pour tout réel x,
$$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?

2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.

3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$

On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.

b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)

c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.

4. a. La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?

b. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.

c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x^2}\right) \mathrm{d}x$.

3. Interpréter graphiquement ce résultat.

EXERCICE 2 [3 points] *Commun à tous les candidats*

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.

2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que A$M \leqslant r$.
Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

EXERCICE 3 [5 points] *Commun à tous les candidats*

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile.
Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile, il ne cumule pas les deux. En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

Les parties A et B sont indépendantes.
Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A : durée d'attente

1. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur.
Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par une variable aléatoire D_1 qui vérifie, pour tout réel t positif : $\quad p(D_1 \leqslant t) = \int_0^t 0,6\,e^{-0,6x}\,dx$.

Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.

2. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur.
On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui vérifie, pour tout réel t positif : $\quad p(D_2 \leqslant t) = \int_0^t \lambda\,e^{-\lambda x}\,dx$, λ étant un réel strictement positif.

a) Sachant que la probabilité que la durée d'attente d'un client mobile choisi au hasard soit inférieure à 4 minutes est 0,797, déterminer la valeur de λ.

b) En prenant $\lambda = 0,4$, peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur?

Partie B : obtention d'un opérateur

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.
On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.
On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7.

De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :
- si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95 ;
- si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

Notons :
- I l'événement : « le client a souscrit un abonnement Internet ».
- O l'événement : « le client obtient un opérateur ».

1. Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.

2. Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou un client mobile ?

EXERCICE 4 [5 points] *Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité*

Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A(1\,;\,5\,;\,-2)$, $B(7\,;\,-1\,;\,3)$ et $C(-2\,;\,7\,;\,-2)$ et on note $\mathscr{P}$ le plan (ABC).
On cherche une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où a, b et c sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que X vérifie la relation : $MX = 73Y$, où M est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Soit N la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits $M \times N$ et $N \times M$, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour $M \times N$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

Pour $N \times M$:

Ans	1	2	3
1	73	0	0
2	0	73	0
3	0	0	73

À l'aide de ces informations, justifier que la matrice M est inversible et exprimer sa matrice inverse M^{-1} en fonction de la matrice N.

3. Montrer alors que : $X = NY$.
En déduire que le plan $\mathscr{P}$ admet pour équation cartésienne :
$10x + 15y + 6z = 73$.

Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan $\mathscr{P}$ ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées x, y et z appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

a. Montrer que les entiers x et y sont solutions de l'équation $(E) : 2x + 3y = 11$.

b. Justifier que le couple $(7\,;\,-1)$ est une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E) pour x et y appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Montrer qu'il existe exactement deux points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces deux points.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Soient x, y et z des entiers naturels tels que $10x + 15y + 6z = 73$.

a. Montrer que y est impair.

b. Montrer que : $x \equiv 1 \quad [3]$. On admet que : $z \equiv 3 \quad [5]$.

c. On pose alors : $x = 1 + 3p$, $y = 1 + 2q$ et $z = 3 + 5r$, où p, q et r sont des entiers naturels.

Montrer que le point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $p + q + r = 1$.

d. En déduire qu'il existe exactement trois points du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels. Déterminer les coordonnées de ces points.