Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU MERCREDI 19 AVRIL 2017

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Calculatrice autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points] *Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité*

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls $(a\,;b)$, on note $\text{pgcd}(a\,;b)$ le plus grand diviseur commun de *a* et *b*. Le plan est muni d'un repère $(\text{O};\vec{\text{i}}\,;\vec{\text{j}})$.

1. Exemple

Soit Δ_1 la droite d'équation $y=\frac{5}{4}x-\frac{2}{3}$.

a) Montrer que si $(x\,;y)$ est un couple d'entiers relatifs alors l'entier $15\,x-12\,y$ est divisible par 3.

b) Existe-t-il au moins un point de la droite Δ_1 dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier.

Généralisation

On considère désormais une droite Δ d'équation (E) : $y=\frac{m}{n}x-\frac{p}{q}$ où *m*, *n*, *p* et *q* sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m\,;n)=\text{pgcd}(p\,;q)=1$.
Ainsi, les coefficients de l'équation (E) sont des fractions irréductibles et on dit que Δ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur *m*, *n*, *p* et *q* pour qu'une droite rationnelle Δ comporte au moins un points dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

2. On suppose ici que la droite Δ comporte un point de coordonnées $(x_0\,;y_0)$ où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a) En remarquant que le nombre ny_0-mx_0 est un entier relatif, démontrer que *q* divise le produit *np*.

b) En déduire que *q* divise *n*.

3. Réciproquement, on suppose que *q* divise *n*, et on souhaite trouver un couple $(x_0\,;y_0)$ d'entiers relatifs tels que $y_0=\frac{m}{n}x_0-\frac{p}{q}$.

a) On pose $n=qr$ où *r* est un entier relatif non nul.
Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $qru-mv=1$.

b) En déduire qu'il existe un couple $(x_0\,;y_0)$ d'entiers relatifs tels que $y_0=\frac{m}{n}x_0-\frac{p}{q}$.

4. Soit Δ la droite d'équation $y=\frac{3}{8}x-\frac{7}{4}$.

Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier.

5. On donne l'algorithme suivant :

a) Justifier que cet algorithme se termine pour toute entrée de *M*, *N*, *P*, *Q*, entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(M\,;N)=\text{pgcd}(P\,;Q)=1$.

b) Que permet-il d'obtenir ?

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que pgcd(M, N) = pgcd(P, Q) = 1 X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :	

```
Si Q divise N alors
    X prend la valeur 0
    Tant que (M/N X − P/Q n'est pas entier)
    et (−M/N X − P/Q n'est pas entier) faire
        X prend la valeur X + 1
    Fin tant que
    Si M/N X − P/Q est entier alors
        Afficher X, M/N X − P/Q
    Sinon
        Afficher −X, −M/N X − P/Q
    Fin Si
Sinon
    Afficher « Pas de solution »
Fin Si
```

EXERCICE 2 [4 points] *Commun à tous les candidats*

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A$(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, B$(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, C$(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$, D$(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.
Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.
À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.
On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.
On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0,8t\ ;\ 1+0,6t)$.

Les questions 1 *et* 2 *sont indépendantes.*

1. **a.** La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

   b. La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathscr{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).

   Lequel ? On donnera une équation de ce plan $\mathscr{P}$.

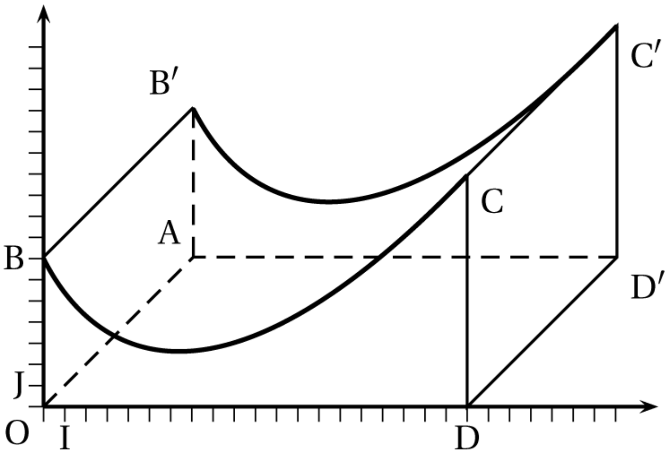
   c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan $\mathscr{P}$, coupe ce plan au point E$(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

   d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2. **a.** Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$.

   b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

EXERCICE 3 [6 points] *Commun à tous les candidats*



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

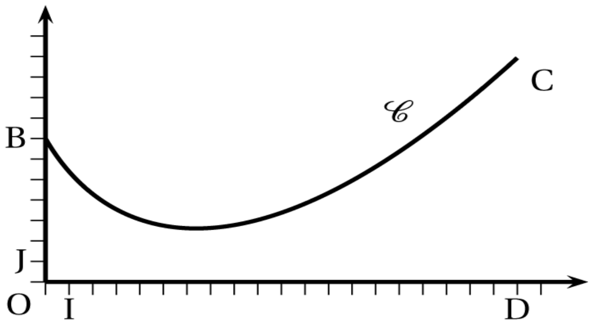
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;20]$ et dresser son tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\,;20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

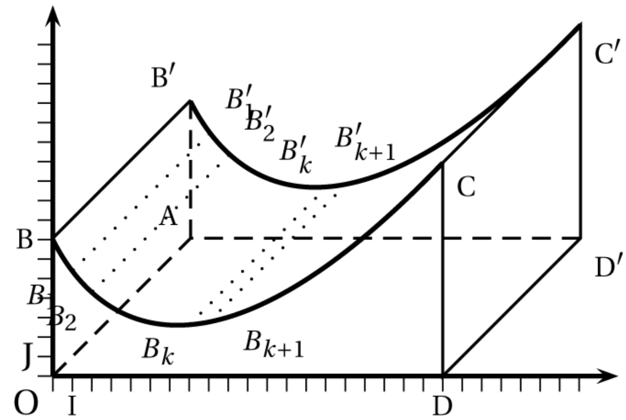
P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\,;\,f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = \text{B}$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.
Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B'_k$ (voir figure).

a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,
$B_kB_{k+1} = \sqrt{1+[f(k+1)-f(k)]^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de ... à ... S prend pour valeur ...... Fin Pour
Sortie	Afficher ...

(**Recopier** le « Traitement » et la « Sortie », et compléter **sur votre copie**)

EXERCICE 4 [5 points] *Commun à tous les candidats*

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\text{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\text{i}$.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\text{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \text{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.