Nom : .... **Prénom** : ....

RENDRE TOUT LE SUJET
AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU MERCREDI 18 JANVIER 2017

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Calculatrice autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées.

EXERCICE 1 [5 points] *Candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité*

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
A et X sont des nombres entiers
Saisir un entier positif A
Affecter à X la valeur de A
Tant que X supérieur ou égal à 26
        Affecter à X la valeur X - 26
Fin du tant que
Afficher X
```

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante (détaillée en quatre étapes) :

- **Étape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Étape 2** : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Étape 3** : $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\begin{cases} z_1 \equiv y_1 \ (26) & \text{avec } 0 \leqslant z_1 \leqslant 25 \\ z_2 \equiv y_2 \ (26) & \text{avec } 0 \leqslant z_2 \leqslant 25 \end{cases}$$

- **Étape 4** : $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

> **Exemple** :
> RE $\rightarrow \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix} \rightarrow$ DP
> Le bloc RE est donc codé en DP

Justifier le passage de $\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 55 \\ 93 \end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. Soient x_1, x_2, x_1', x_2' quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer que $\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 + x_2 & \equiv & 3x_1' + x_2' \quad (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv & 5x_1' + 2x_2' \quad (26). \end{array}\right.$

   b. En déduire que $x_1 \equiv x_1' \quad (26)$ et $x_2 \equiv x_2' \quad (26)$ puis que $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

   a. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

   b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$.

   c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\left\{\begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & y_1 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 & \equiv & y_2 & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array}\right.$

   d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3. Dans cette question nous allons généraliser ce procédé de décodage.
   On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape 3. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ par les étapes 2 et 3 du procédé de codage.

   Soient y_1' et y_2' tels que $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = C' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ où $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

   Soient x_1 et x_2, les nombres entiers tels que $\left\{\begin{array}{lcll} x_1 & \equiv & y_1' & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 & \equiv & y_2' & (26) \text{ avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{array}\right.$

   Montrer que $\left\{\begin{array}{lcll} 3x_1 + x_2 & \equiv & z_1 & (26) \\ 5x_1 + 2x_2 & \equiv & z_2 & (26) \end{array}\right.$.

   Conclure.

4. Décoder QC.

EXERCICE 2 [5 points] *Commun à tous les candidats*

Rappel de Première S : Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$.
À tout point M d'affixe $z_M = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -\mathrm{i}z_M$.
On désigne par I le milieu du segment $[\mathrm{A}M]$.
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane $(\mathrm{O}I)$ du triangle $\mathrm{OA}M$ est aussi une hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$ (propriété 1) et que $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

  a. Déterminer la forme algébrique de z_M.

  b. Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
  Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

  c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
  Tracer la droite $(\mathrm{O}I)$ et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.

  a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

  b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

  c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

  d. Montrer que la droite $(\mathrm{O}I)$ est une hauteur du triangle $\mathrm{OB}M'$.

  e. Montrer que $\mathrm{B}M' = 2\mathrm{O}I$.

EXERCICE 3 [5 points] *Commun à tous les candidats*

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1

Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v

Fin algorithme

Algorithme N° 2

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur 1

  Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour

Fin algorithme

Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels

Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1

Pour i variant de 1 à n faire
  Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

EXERCICE 4 [5 points] *Commun à tous les candidats*

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kx\mathrm{e}^{-kx}.$$

On note $\mathscr{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A : Étude du cas $k = 1$

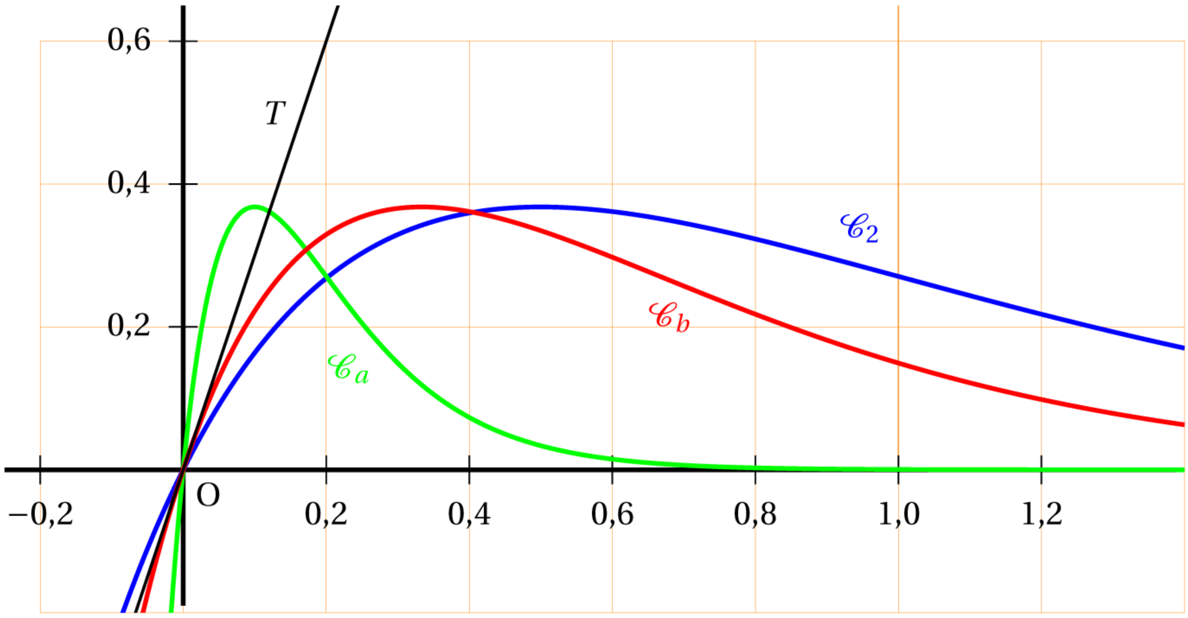
On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathscr{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathscr{C}_k$ passent par un même point.
2. **a.** Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f_k'(x) = k(1 - kx)\mathrm{e}^{-kx}.$$

b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

d. Écrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}_k$ au point O origine du repère.

e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.