

Nom :

Prénom :

RENDRE TOUT LE SUJET
AVEC VOTRE COPIE

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL « BLANC »

MATHÉMATIQUES

Série S

ÉPREUVE DU MERCREDI 18 JANVIER 2017

Durée de l'épreuve : 4 heures Coefficient : 7

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Calculatrice autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées.

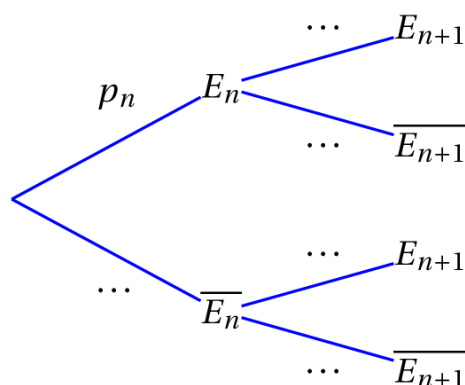
Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n -ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n .

On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

- Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
 - Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
- Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



- Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
- Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r .
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r .
- En déduire la limite de la suite (p_n) .

↳
(suite exercice 1)

- e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P < 0,05 - 10^{-K}$ P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ J prend la valeur $J + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?

Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0,05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X .

EXERCICE 2 [5 points]

Commun à tous les candidats

Rappel de Première S : Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$ et le point B d'affixe $z_B = i$.

À tout point M d'affixe $z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'} = -iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA) , la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM' = 2OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend

$$z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

- a. Déterminer la forme algébrique de z_M .

b. Montrer que $z_{M'} = -\sqrt{3} - i$.

Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M = x + iy$ avec $y \neq 0$.

a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y .

b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y .

c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e. Montrer que $BM' = 2OI$.

EXERCICE 3 [5 points]

Commun à tous les candidats

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \frac{9}{6 - v_n} \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$
Fin pour Afficher v
Fin algorithme

Algorithme N° 2
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme : Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1
Afficher v
v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$
Fin pour
Fin algorithme

Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels
Début de l'algorithme : Lire n v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire Afficher v
v prend la valeur $\frac{9}{6 - v}$
Fin pour Afficher v
Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = \frac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n) , puis celle de (v_n) en fonction de n .
3. Déterminer la limite de la suite (v_n) .

EXERCICE 4 [5 points]

Commun à tous les candidats

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}.$$

On note \mathcal{C}_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Partie A : Étude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par

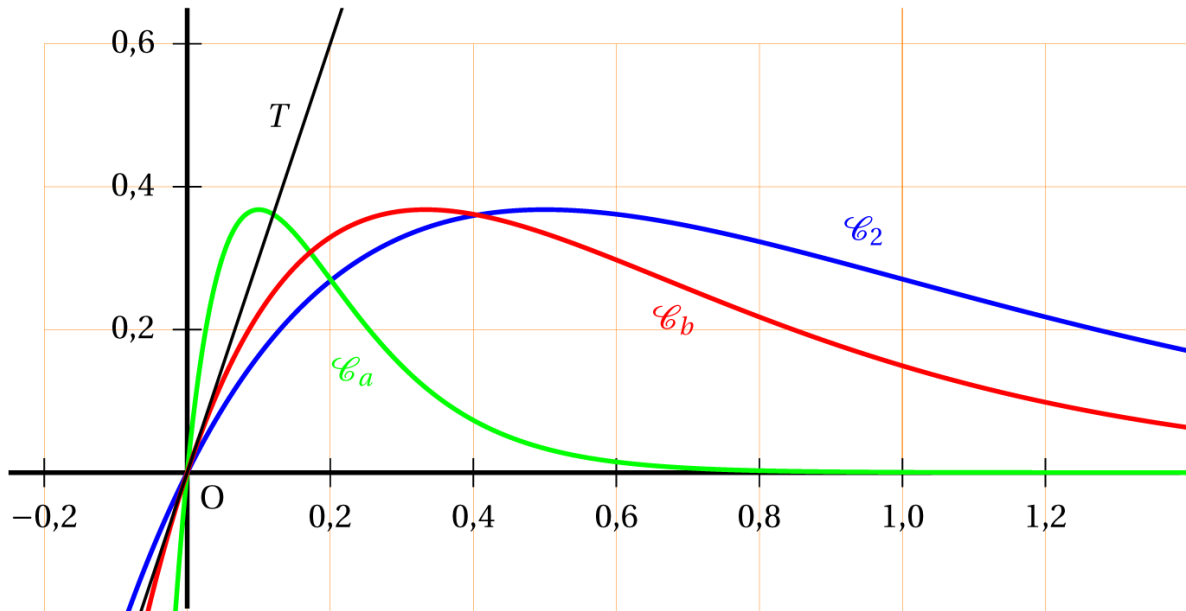
$$f_1(x) = xe^{-x}.$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe \mathcal{C}_1 admet une asymptote que l'on précisera.
2. Étudier les variations de f_1 sur \mathbb{R} puis dresser son tableau de variation sur \mathbb{R} .

3. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x .

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_b où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à \mathcal{C}_b au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes \mathcal{C}_k passent par un même point.
2. a. Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a

$$f'_k(x) = k(1 - kx)e^{-kx}.$$

- b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.
- c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2 . Expliquer la démarche.
- d. Écrire une équation de la tangente à \mathcal{C}_k au point O origine du repère.
- e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b .