GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES (RAPPELS DE PREMIÈRE S)
EXERCICES

EXERCICE 1 Premiers termes

Pour chaque suite, calculer les trois premiers termes.

1. $u_n=\dfrac{7n-2}{n+4}$	**2.** $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} = 2u_n+3 \end{cases}$	**3.** u_n est le n$^{\text{ème}}$ nombre premier.
4. u_n est le nombre de diviseurs positifs de n	**5.** On place 1000 € sur un livret (intérêts composés) au taux de 2,5 % par an : u_n est la somme dont on dispose la n$^{\text{ème}}$ année.	

EXERCICE 2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

On considère la suite u définie par $u_0=-0{,}5$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+2x+2$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
2. Représenter graphiquement les 10 premiers termes de la suite (u_n) dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.
3. Quelle(s) conjecture(s) peut-on faire sur la suite (u_n) à l'aide de cette représentation graphique ?

EXERCICE 3 Sens de variation

Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. $u_n=-n^2+5n-2$ **2.** $v_n=\dfrac{n+1}{n+2}$ **3.** $u_n=\dfrac{3^n}{2}$ **4.** $z_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

5. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ **6.** $v_n=\dfrac{2^n}{n+1}$ **7.** $w_n=\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^2$ de trois manières

Aide pour le 7. :
- étudier la fonction $f(x)=\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$
- calculer $w_{n+1}-w_n$
- calculer $\dfrac{w_{n+1}}{w_n}$ lorsque $w_n\neq 0$

EXERCICE 4 Suite majorée/minorée/bornée

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n=5-\dfrac{1}{n}$ pour tout entier naturel non nul n.
Démontrer que la suite (u_n) est bornée.
2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{2n-1}{n+2}$.
a) Montrer que (u_n) est majorée par 2.
b) Montrer que (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$ à partir d'un certain rang.

<u>EXERCICE 5</u> Suite arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 5 - 2n$ pour tout entier naturel *n*.
Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

<u>EXERCICE 6</u> Somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique

1. Combien y a-t-il de termes dans les sommes suivantes :

- $S_1 = u_0 + u_1 + \ldots + u_{13}$
- $S_2 = u_1 + u_2 + \ldots + u_{13}$
- $S_3 = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{13}$
- $S_4 = u_{21} + u_{22} + \ldots + u_{37}$

2. Calculer les sommes suivantes :

- $A = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$
- $B = 7 + 8 + 9 + \ldots + n$ *de deux manières différentes*
- $C = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$ où $q \in \mathbb{R}$
- $D = \sum_{k=5}^{11} 2^k$ *de deux manières différentes, sans calculatrice ; puis avec calculatrice, touche* $\sum$ (
- $S_1 = u_0 + u_1 + \ldots + u_{13}$ où (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 1,1
- $S_2 = u_1 + u_2 + \ldots + u_{13}$ où (u_n) est géométrique de premier terme $u_1 = 1{,}1$ et de raison 2
- $S_3 = u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{13}$ où (u_n) est arithmétique de raison 0,5 avec $u_{10} = 1000$
- $S_4 = u_{21} + u_{22} + \ldots + u_{37}$ où (u_n) est géométrique de raison π avec $u_{21} = \sqrt{2}$
- $S_5 = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots - 2014^2 + 2015^2$.

<u>EXERCICE 7</u>

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 5n$ pour tout entier naturel *n*.
1) Calculer les quatre premiers termes de la suite.
2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

<u>EXERCICE 8</u> Suite arithmétique

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_n = 5n - 3$.
1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
2. Démontrer que (u_n) est arithmétique (préciser le terme initial et la raison).
3. Étudier le sens de variation de (u_n) .
4. Calculer la somme suivante : $S = \sum_{k=0}^{97} u_k$.

<u>EXERCICE 9</u> Suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2}$.
1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
2. Démontrer que (u_n) est géométrique (préciser le terme initial et la raison).
En déduire sa forme explicite.
3. Étudier le sens de variation de (u_n) .
4. Calculer la somme suivante : $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{32768}$.
NB : comment écrire cette somme avec le symbole Σ ?

EXERCICE 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n$ pour tout entier naturel *n*.
La suite (u_n) est-elle géométrique ?

EXERCICE 11 Suite récurrente géométrique

Soient les suites (v_n) et (w_n) définies par $v_0 = -\frac{3}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n - 1 \\ w_n = 2 v_n + 6 \end{cases}$.

1. Démontrer que (w_n) est géométrique.
2. Donner les expressions de v_n et w_n en fonction de *n*.

EXERCICE 12

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k \end{cases}$.

Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^{n-1}$.

EXERCICE 13

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Cette suite est-elle bien définie ?
2. (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Utilisez cette suite pour trouver l'expression de u_n en fonction de *n*.