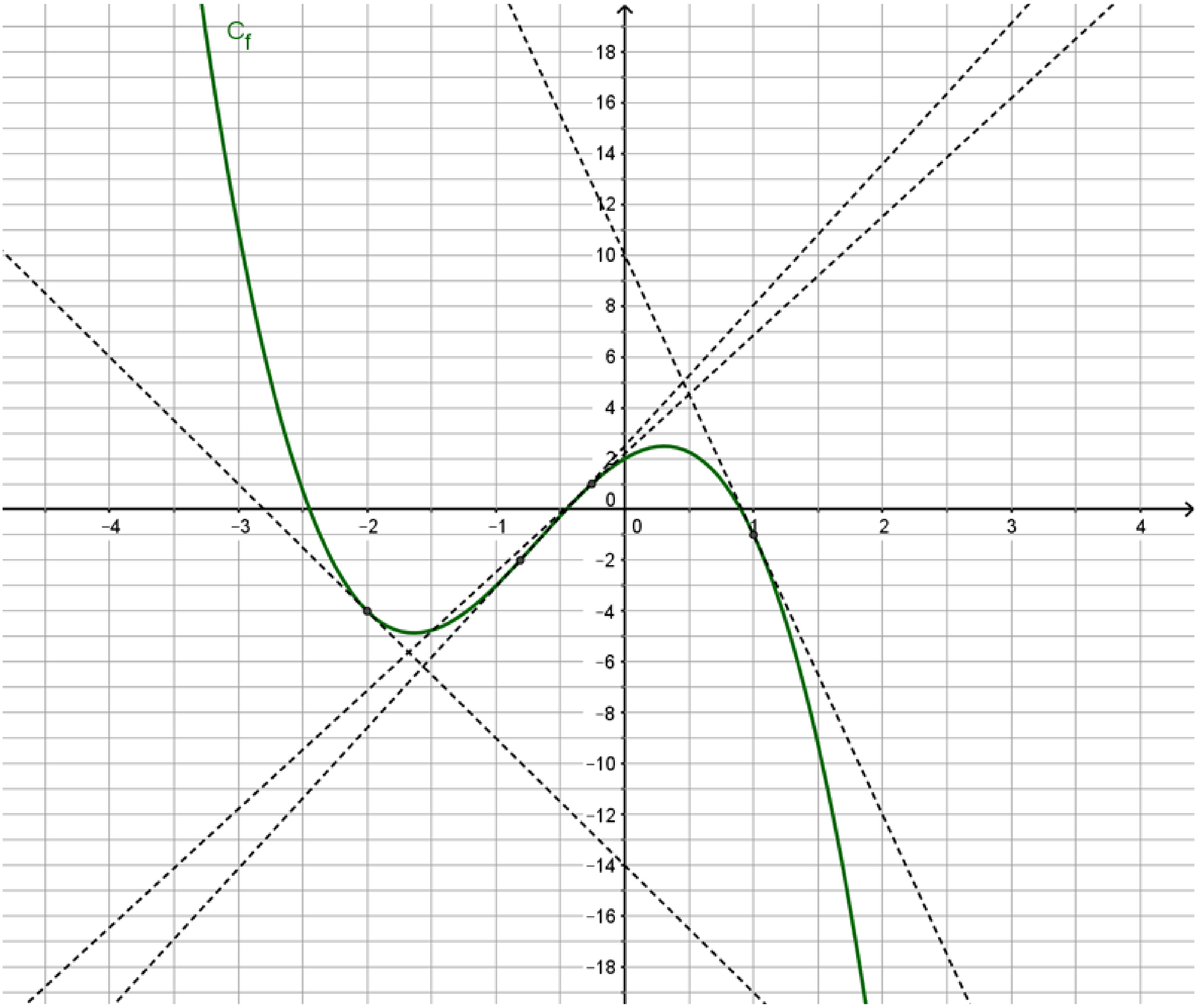
Nom : .... **Prénom** : ....

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 3

JEUDI 5 JANVIER 2017 / 50 minutes / Calculatrice autorisée.

EXERCICE 1



On a tracé ci-dessus la courbe représentative d'une fonction f et quatre de ses tangentes.
Donner graphiquement $f'(1)$ et $f'(-2)$:

$f'(1)=$ ________________ et $f'(-2)=$ ________________

EXERCICE 2

On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{x-1}$.
Cette fonction g est-elle dérivable en 1 ?

EXERCICE 3

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.
   b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
2. **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. **a.** Calculer $f(0)$.
   b. Démontrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.
   c. Étudier le sens de variation de la fonction f.
   d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
   Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
   En déduire la réponse au problème.

Remarque pour la question 3 (partie B) : $\dfrac{2}{147} \approx \mathrm{e}^{-4,297\,285\,406}$