

## RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

**MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 2**

MERCREDI 9 NOVEMBRE 2016

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

Un barème (note sur 38 - présentation sur 1) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié. Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice. Si vous le suivez, il vous restera alors 10 min pour tout relire.

**EXERCICE 1***Dur comme un roc***2,5 pts**

env. 5 min

Démontrer la propriété suivante : « Si  $q \in \mathbb{R}$  avec  $q > 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ . »

**EXERCICE 2***Born in nineteen-eighty-five***4,5 pts (2,5 + 0,5 + 1,5)**

env. 10 min

On cherche à savoir à quelle fraction est égal le nombre 0,1985 1985... (avec une infinité de 1985).

On note  $v_n = 0, \underbrace{1985 1985 1985 \dots}_{n \text{ fois}}$  avec  $n$  répétitions consécutives de 1985.

Ainsi on a :  $v_1 = 0,1985$ ,  $v_2 = 0,1985 1985$ ,  $v_3 = 0,1985 1985 1985$ , etc.

On admet que, pour tout entier naturel non nul :  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1985}{10^{4k}}$  ie  $v_n = \frac{1985}{10^4} + \frac{1985}{10^8} + \frac{1985}{10^{12}} + \dots + \frac{1985}{10^{4n}}$ .

Autrement dit, après factorisation, on a :  $v_n = 1985 \times \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{4k}}$ .

1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{4k}} = \frac{1}{9999} \left( 1 - \left( \frac{1}{10^4} \right)^n \right)$ .

Aide : remarquer que  $\frac{1}{10^{4k}} = \left( \frac{1}{10^4} \right)^k$ .

2. En déduire  $v_n$  en fonction de  $n$ .

3. Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .

En déduire à quelle fraction est égal 0,1985 1985... avec une infinité de 1985.

**EXERCICE 3***Il y a une infinité de choses qu'on ne fait bien que lorsqu'on les fait par nécessité<sup>1</sup>*

env. 20 min

**8 pts (2,5 + 3 + 2,5)**

1. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = \frac{-5n^2 - 3n - 2}{2n^3 + n}$ .

2. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 3$  par :  $v_n = \frac{\sin(n)}{n-2}$ .

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $w_n = \frac{3 \times 4^n - 5^{n+2}}{2^n + 4 \times 7^{n+1}}$ .

<sup>1</sup> Joseph JOUBERT, 26 novembre 1809

**EXERCICE 4** « Bis » et frère de l'être**5 pts (1 + 1,5 + 2,5)**

env. 15 min

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0=0,5$  et  $u_{n+1}=\frac{-u_n+3}{3u_n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On note également  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{3} \}$  par  $f(x)=\frac{-x+3}{3x-1}$ .

1. La courbe représentative de la fonction  $f$  et la droite d'équation  $y=x$  sont tracées en annexe. Représenter graphiquement les 5 premiers termes de la suite  $(u_n)$  :  $u_0, u_1, u_2, u_3$ , et  $u_4$ . Laisser les traits de construction.

2. On admet que  $u_n \neq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On admet également que  $v_n \neq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$ .

b) En déduire alors  $v_n$  en fonction de  $n$ .

Utiliser ce résultat pour trouver l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

**EXERCICE 5** Pas si complexe**12 pts (1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2)**

env. 35 min

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la fonction  $f$  qui à tout nombre complexe  $z$  associe :  $f(z)=z^2+2z+9$ .

1. Calculer l'image de  $-2-i\sqrt{5}$  par la fonction  $f$ .

2. a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z)=5$ .

b) Soit  $\lambda$  un nombre réel. On considère l'équation  $f(z)=\lambda$  d'inconnue  $z$ . Déterminer l'ensemble des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles cette équation admet deux solutions complexes conjuguées.

3. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  vérifie :  $|f(z)-8|=3$ .

a) Montrer que :  $|f(z)-8|=3 \Leftrightarrow |z+1|=\sqrt{3}$ .

b) En déduire la nature géométrique précise de l'ensemble (F).

4. Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z=x+iy$  où  $x$  et  $y$  sont des réels.

a) Montrer que la forme algébrique de  $f(z)$  est :  $x^2-y^2+2x+9+i(2xy+2y)$ .

b) On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  est telle que  $f(z)$  soit un nombre réel. Montrer que (E) est la réunion de deux droites  $D_1$  et  $D_2$  dont on précisera les équations.

**EXERCICE 6** Convergence et unité**4,5 pts (2,5 + 2)**

env. 15 min

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_{n+1}=f(u_n)$  et  $u_0=1,5$ , avec  $f(x)=x^2-2x+2$ .

On admet que, pour tout entier naturel  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 2$  et  $u_{n+1}-u_n=(u_n-2)(u_n-1)$ .

1. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

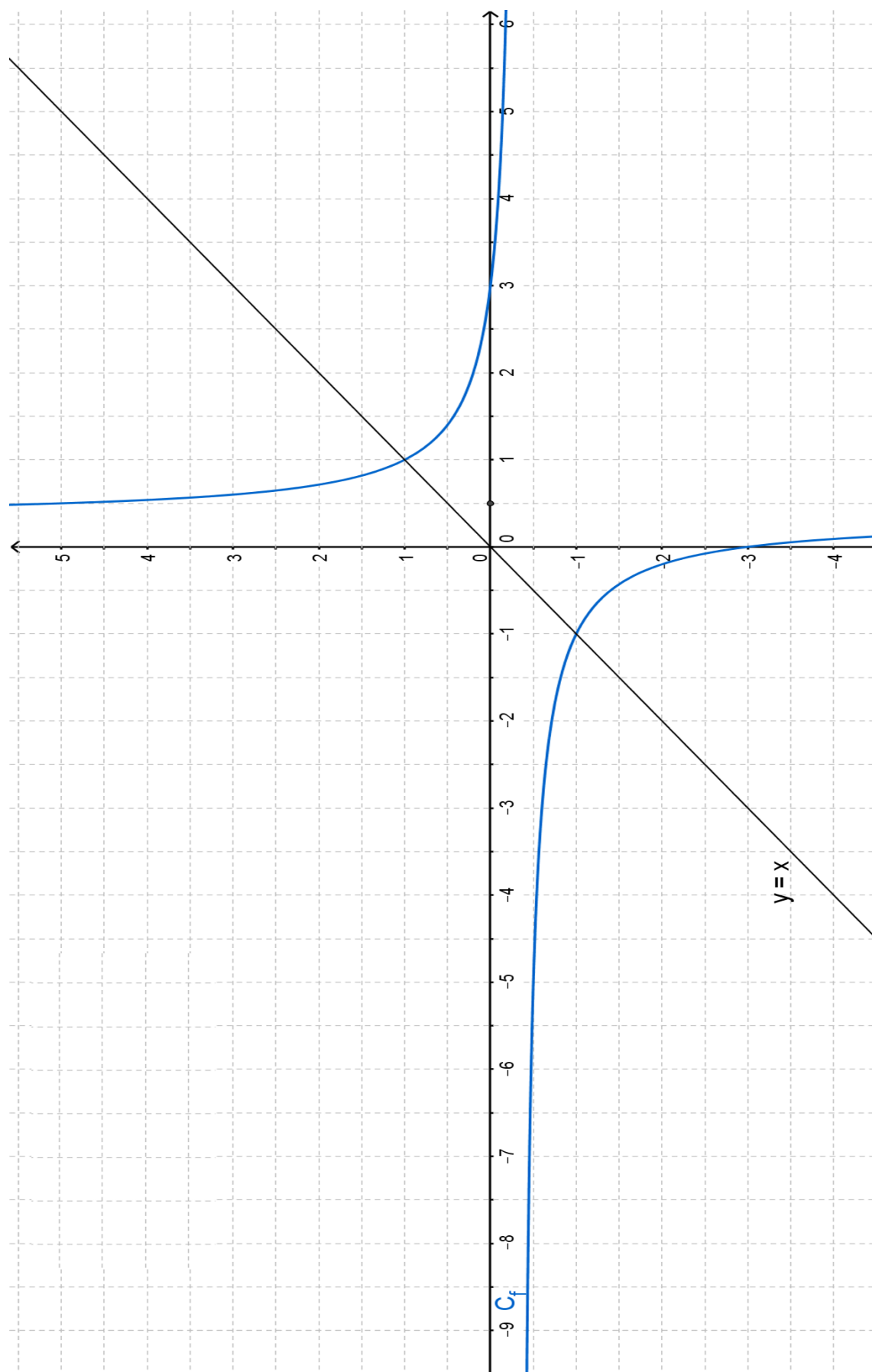
En déduire qu'elle est convergente.

2. La suite  $(u_n)$  converge donc vers un réel que l'on note  $m$ . On admet<sup>2</sup> que  $m$  vérifie  $f(m)=m$ .

En déduire vers quel réel la suite  $(u_n)$  converge.

<sup>2</sup> Cela se démontre en utilisant le *théorème du point fixe*, vu en classe.

## Exercice 4 question 1



Sur Internet, dont Facebook, on trouve souvent cette citation, toujours attribuée à l'écrivain britannique – ainsi qualifié de *visionnaire* – Aldous HUXLEY (1894 – 1963) dans son célèbre livre *Le meilleur des mondes*, écrit en 1932 :

Pour étouffer par avance toute révolte, il ne faut pas s'y prendre de manière violente.

Les méthodes du genre de celles d'Hitler sont dépassées. Il suffit de créer un conditionnement collectif si puissant que l'idée même de révolte ne viendra même plus à l'esprit des hommes.

L'idéal serait de formater les individus dès la naissance en limitant leurs aptitudes biologiques innées.

Ensuite, on poursuivrait le conditionnement en réduisant de manière drastique l'éducation, pour la ramener à une forme d'insertion professionnelle. Un individu inculte n'a qu'un horizon de pensée limité et plus sa pensée est bornée à des préoccupations médiocres, moins il peut se révolter. Il faut faire en sorte que l'accès au savoir devienne de plus en plus difficile et élitiste.

Que le fossé se creuse entre le peuple et la science, que l'information destinée au grand public soit anesthésiée de tout contenu à caractère subversif.

Surtout pas de philosophie.

Là encore, il faut user de persuasion et non de violence directe : on diffusera massivement, via la télévision, des divertissements flattant toujours l'émotionnel ou l'instinctif.

On occupera les esprits avec ce qui est futile et ludique.

Il est bon, dans un bavardage et une musique incessante, d'empêcher l'esprit de penser.

On mettra la sexualité au premier rang des intérêts humains. Comme tranquillisant social, il n'y a rien de mieux. En général, on fera en sorte de bannir le sérieux de l'existence, de tourner en dérision tout ce qui a une valeur élevée, d'entretenir une constante apologie de la légèreté ; de sorte que l'euphorie de la publicité devienne le standard du bonheur humain et le modèle de la liberté.

Le conditionnement produira ainsi de lui-même une telle intégration, que la seule peur – qu'il faudra entretenir – sera celle d'être exclus du système et donc de ne plus pouvoir accéder aux conditions nécessaires au bonheur.

L'homme de masse, ainsi produit, doit être traité comme ce qu'il est : un veau, et il doit être surveillé comme doit l'être un troupeau. Tout ce qui permet d'endormir sa lucidité est bon socialement, ce qui menacerait de l'éveiller doit être ridiculisé, étouffé, combattu.

Toute doctrine mettant en cause le système doit d'abord être désignée comme subversive et terroriste et ceux qui la soutienne devront ensuite être traités comme tels.

On observe cependant, qu'il est très facile de corrompre un individu subversif : il suffit de lui proposer de l'argent et du pouvoir.

Après vérification, il s'agit en fait d'une prosopopée, c'est-à-dire une figure de style qui consiste à faire parler un mort. En effet, c'est une citation de Serge Carfantan, écrite sur son blog en 2007, et introduite par :

Le livre de Huxley est paru en 1932. Son caractère visionnaire est stupéfiant. Presque inquiétant. Tous les ingrédients du roman sont aujourd'hui effectivement réunis pour que le scénario soit... en passe d'être réalisé. Si nous devons formuler dans un discours une prosopopée du cynisme politique incarnée par le personnage cynique d'Huxley, cela donnerait quoi ?