

Nom :

Prénom :

RENDRE LE SUJET AVEC VOTRE COPIE

MATHÉMATIQUES : DEVOIR SURVEILLÉ 1

MERCREDI 21 SEPTEMBRE 2015

Durée de l'épreuve : 1 h 50. Calculatrice autorisée.

ATTENTION À LA PRÉSENTATION DE LA COPIE

Un barème (note sur 30) est donné à titre indicatif, et pourra être modifié.

Un temps indicatif est annoncé pour chaque exercice.

Si vous le suivez, il vous restera alors 15 min pour tout relire.

EXERCICE 1 Défense de stationner

env. 10 min

On considère la suite (u_n) définie par : u_0 = 3/2 et : ∀ n ∈ ℕ, u_{n+1} = -2u_n^2 + 2u_n + 1.

4,5 pts (1 + 3,5)

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n ≥ 1, u_n = -1/2.

EXERCICE 2 Une impression de déjà vu

env. 10 min

Étudier le sens de variations de la suite (v_n) définie par v_n = 2^n / (n+1).

3 pts

EXERCICE 3 Cinq fruits et légumes par jour ?

env. 10 min

3,5 pts (1 + 2,5)

Le tableau ci-dessous retrace l'évolution de la consommation moyenne de fruits et légumes frais (FLF), en kg par personne et par an, en France.

Table with 13 columns: Année (1970-2008) and rows for consumption in kg per person.

Source : INSEE

On décide de modéliser la consommation annuelle de FLF, à partir de 2000, à l'aide d'une suite géométrique (u_n) de raison 0,9942 (car cette consommation a baissé, en moyenne et par an, d'environ 0,58 % entre 2000 et 2008, et 1 - 0,58/100 = 0,9942). Pour tout entier naturel n, u_n désigne la consommation théorique de FLF l'année 2000+n. Ainsi u_0 = 90,1.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. D'après ce modèle, calculer la masse de FLF (en kg, arrondie à l'unité) qu'aura mangé « un français moyen » entre 2000 et 2050 (ces deux années incluses).

Remarques :

Il est très surprenant de constater les données de l'INSEE.

En effet, 86 kg par an correspond environ à 236 g par jour. Or, une pomme ou une tomate, cela pèse environ 150 g...

Cela signifierait donc qu'un « français moyen » mange seulement 2 FLF par jour. Bien sûr, ne sont comptabilisés ici que les produits FRAIS.

Entre les années 40 et les années 80, on constate une forte augmentation, puis une stabilisation.

Mais si l'augmentation de la consommation de fruits et légumes a permis d'améliorer l'équilibre nutritionnel et a contribué à augmenter les apports en vitamines et en fibres, la réduction récente de leurs apports va dans le sens d'une réduction de la densité en micronutriments.

EXERCICE 4 *Homographique et fière de l'être*

env. 35 min

On considère la suite (u_n) définie par :

9 pts (1,5 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2,5)

$$u_0=0,5 \text{ et } u_{n+1}=\frac{-u_n+3}{3u_n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On note également f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{3} \}$ par $f(x)=\frac{-x+3}{3x-1}$.

1. Sur le graphique de la dernière page sont tracées la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y=x$.

Représenter graphiquement les 7 premiers termes de la suite (u_n) : $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$ et u_6 .

Laisser les traits de construction.

2. a) Calculer u_1 et u_2 .

b) (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

3. On admet que $u_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On considère la suite (v_n) définie par $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Démontrer que $v_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

c) En déduire alors v_n en fonction de n .

Utiliser ce résultat pour trouver l'expression de u_n en fonction de n .

EXERCICE 5 *Un classique arithmético-géométrique appliqué*

env. 15 min

Voici les données la population française que j'ai obtenues sur le site de l'INSEE :

5 pts (1 + 2 + 2)

« Au 1^{er} janvier 2015, 66,318 millions d'habitants résident en France »

« La population de la France compte 300 000 personnes de plus soit + 0,4 % sur l'année 2014. »

« En 2013, 332 000 personnes sont entrées en France et 299 000 en sont sorties, soit un solde migratoire évalué à 33 000 personnes. »

On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.

On note u_n la population de l'année 2015+n exprimée en milliers d'habitants.

On a donc $u_0=66\,318$ et $u_{n+1}=1,004u_n+33$.

1. A l'aide de la calculatrice (expliquer votre démarche), conjecturer le nombre d'habitants en France en 2025. En donner une valeur approchée au milliers d'habitants près.

2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n=u_n+8\,250$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique et exprimer v_n en fonction de n .

b) En déduire u_n en fonction de n , et en déduire une prévision du nombre d'habitants en France en 2060¹.

¹ En octobre 2010 puis en janvier 2016, l'INSEE écrivait :

Au 1^{er} janvier 2016, la France compte 66,6 millions d'habitants. Les habitants âgés d'au moins 65 ans représentent 18,8 % de la population, soit une progression de 3,7 points en 20 ans. Les habitants âgés de 20 à 59 ans représentent un peu plus de la moitié de la population, soit une baisse de 3,2 points en vingt ans.

Si les tendances démographiques récentes se maintiennent, la France métropolitaine comptera 73,6 millions d'habitants au 1^{er} janvier 2060, soit 11,8 millions de plus qu'en 2007. Le nombre de personnes de plus de 60 ans augmentera, à lui seul, de plus de 10 millions. En 2060, une personne sur trois aura ainsi plus de 60 ans.

EXERCICE 6 *L'inégalité n'est pas une preuve de l'existence de l'égalité*

env. 10 min

On considère un réel a tel que $a > 0$.

4 pts

Démontrer l'inégalité de Bernoulli : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$.

EXERCICE 7 *« Ce serait raciste de penser que les étrangers n'ont pas le droit d'être cons. » Coluche*

env. 5 min

Disney² adore conjecturer des résultats et faire croire qu'il les a démontrés.

1 pt

Comme le disait La Fontaine (pas la source d'eau !), « patience et longueur de temps font plus que force ni que rage ».

Pour une fois, à force de travail et de tentatives intellectuelles souvent stériles, il pense avoir démontré le théorème suivant.

« Quel que soit l'entier naturel non nul n : si on choisit n M&M's, ils sont de la même couleur ».

Voici la preuve qu'il propose à son professeur de mathématiques préféré, pensant lui faire plaisir :

On note $P(n)$: « si on choisit n M&M's, ils sont de la même couleur ».

Initialisation : $n = 1$

Si on choisit un seul M&M's, c'est évident.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $P(n)$ vraie.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, ie « si on choisit $n+1$ M&M's, ils sont de la même couleur ».

On considère donc $n+1$ M&M's, que l'on numérote de 1 à $n+1$.

On forme un premier tas constitué des M&M's 1 à n .

Par hypothèse de récurrence, ils sont de la même couleur.

On forme ensuite un second tas constitué des M&M's 2 à $n+1$.

Il y a n M&M's dans ce tas, donc d'après l'hypothèse de récurrence, ils ont la même couleur.

Comme le M&M's numéro 2 appartient aux deux tas, les $n+1$ M&M's sont de la même couleur.

Conclusion : ce raisonnement par récurrence montre que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

quel que soit l'entier naturel non nul n , si on choisit n M&M's, ils sont de la même couleur.

Comme toujours, Disney a fait une erreur. Saurez-vous la trouver ? Expliquer.

² Toute ressemblance avec des personnes existantes ou ayant existé est purement fortuite.

Exercice 4 question 1

