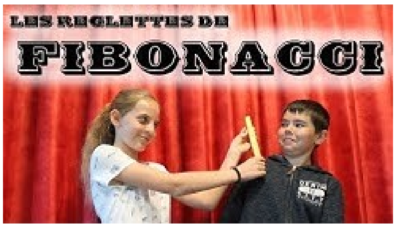
TS-DM

LE THÉORÈME DE ZECKENDORF

Pré-requis : algorithme ; raisonnement par récurrence



Vidéo à regarder (env. 4 minutes) :

https://youtu.be/KqkJup5Ccjw

Nous savons déjà que nous pouvons écrire tout nombre :

- en base 10, notre **système décimal** avec les chiffres de 0 à 9.
Par exemple : $1\,234\,567=\mathbf{1}\times10^6+\mathbf{2}\times10^5+\mathbf{3}\times10^4+\mathbf{4}\times10^3+\mathbf{5}\times10^2+\mathbf{6}\times10^1+\mathbf{7}\times10^0$.

- en base 2, le **système binaire** très utilisé en informatique.
Par exemple : le nombre $1\,234\,567$ (en base 10) s'écrit **100101101011010000111** en binaire.
$$1\,234\,567=\mathbf{1}\times2^{20}+\mathbf{1}\times2^{17}+\mathbf{1}\times2^{15}+\mathbf{1}\times2^{14}+\mathbf{1}\times2^{12}+\mathbf{1}\times2^{10}+\mathbf{1}\times2^{9}+\mathbf{1}\times2^{7}+v\,1\times2^{2}+\mathbf{1}\times2^{1}+\mathbf{1}\times2^{0}$$

- en base 16, le **système hexadécimal**, très couramment utilisé en électronique ainsi qu'en informatique.
Par exemple : le nombre $1\,234\,567$ (en base 10) s'écrit **12D687** en hexadécimal (la lettre A correspond à 10, B à 11, … , F à 15).
$$1\,234\,567=\mathbf{1}\times16^5+\mathbf{2}\times16^4+\mathbf{13}\times16^3+\mathbf{6}\times16^2+\mathbf{8}\times16^1+\mathbf{7}\times16^0$$

12D687 - en base 60, le **système sexagésimal**, bien pratique pour la mesure des angles et des coordonnées géographiques (le fameux système DMS => **D**egrés **M**inutes **S**econdes), utilisé pour la première fois par les Sumériens au III^e millénaire av. J.-C. et encore aujourd'hui puisque nous décrivons les horaires en heures/minutes/secondes dans cette base.

Plus généralement, on peut montrer que tout entier naturel peut s'écrire **en base *b*** où b est un entier naturel supérieur ou égal à 2 : $n=a_0\times b^0+a_1\times b^1+\ldots+a_k\times b^k$, avec $a_i<b$.

Mais plus surprenant encore, le **théorème de Zeckendorf** énonce que tout entier naturel peut s'écrire **en « base Fibonacci »** ! En base quoi ?!

La ***suite de Fibonacci*** est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent : $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.
Les premiers termes[1] de la suite (F_n) sont donc : 0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ; …
Pour les besoins du théorème de Zeckendorf, nous considérons dans ce devoir la suite définie par :
$F_0=1$, $F_1=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.
Les premiers termes de la suite (F_n) sont donc : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89 ; 144 ; …

Le théorème de Zeckendorf énonce plus précisément que **TOUT ENTIER NATUREL PEUT S'EXPRIMER DE FAÇON UNIQUE COMME SOMME DE NOMBRES DE FIBONACCI NON CONSÉCUTIFS**.
Par exemple : $38=34+3+1=F_7+F_2+F_0$.
Autre exemple : $56\,432=46\,368+6\,765+2\,584+610+89+13+3=F_{22}+F_{18}+F_{16}+F_{13}+F_9+F_5+F_2$.

Ce théorème fut démontré[2] en 1952 par Édouard Zeckendorf [1901 – 1983], médecin belge, officier de l'armée et mathématicien.

1 Plus on avance dans la suite de Fibonacci et plus le rapport de deux nombres successifs (le plus grand / le plus petit) tend vers le **nombre d'or**... Magique !

2 Zeckendorf a publié sa démonstration du théorème en 1972, alors que l'énoncé était connu, sous le nom « théorème de Zeckendorf », depuis longtemps. Ce paradoxe est expliqué dans l'introduction de l'article de Zeckendorf : un autre mathématicien, Gerrit Lekkerkerker, a rédigé la preuve du théorème (et d'autres résultats) à la suite d'un exposé de Zeckendorf, et l'a publié en 1952, tout en attribuant la paternité à Zeckendorf.

On rappelle qu'ici, la suite de Fibonacci est définie par :

$$F_0 = 1 \;,\quad F_1 = 2 \;\text{ et pour tout }\; n \in \mathbb{N},\; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \;.$$

Il est facile de démontrer qu'il s'agit d'une suite d'entiers naturels et que (F_n) est strictement positive.

Partie 1 : préliminaires

1. Démontrer que la suite (F_n) est strictement croissante.

2. Cette suite est-elle majorée ? Justifier rapidement.

Partie 2 : démonstration du théorème de Zeckendorf

1. Existence

Démontrer que tout entier naturel non nul n s'écrit comme somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.

Aide. Par récurrence en posant $P(n)$: « tout entier naturel inférieur à n s'écrit comme somme de nombres de Fibonacci non consécutifs ». C'est ce qu'on appelle une ***récurrence forte***.

Voici un schéma d'aide à la démonstration pour l'hérédité.

<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie.

Soit un entier inférieur à $n+1$, noté k.

• ***1^{er} cas*** : $k \leqslant n$

`… A compléter …`

• ***2^{ème} cas*** : $k > n$

Alors cet entier est nécessairement $n+1$.

- Si $n+1$ est un nombre de Fibonacci, alors `… A compléter …`
- Si $n+1$ n'est pas un nombre de Fibonacci :

  (F_n) est strictement croissante et non majorée, donc il existe un entier r tel que $F_r < n+1 < F_{r+1}$.

  On pose $k = n+1-F_r$.

  Alors : montrer que $0 < k < n$, puis `… A compléter …`

2. Unicité

a) Démontrer, par récurrence sur p, le lemme[3] suivant :

FACULTATIF

> **Lemme.** La somme de nombres de Fibonacci non consécutifs est strictement inférieure au successeur du plus grand terme de la somme.
> Autrement dit, si on considère p nombres de Fibonacci non consécutifs (dans l'ordre croissant) notés F_{r_1} , F_{r_2} , … , F_{r_p} , alors leur somme est strictement inférieure à F_{r_p+1} .

b) Soit n un entier naturel non nul.

On suppose qu'il peut s'écrire de deux façons différentes comme somme de nombres de Fibonacci non consécutifs (rangés en ordre croissant) :

$$n = F_{r_1} + F_{r_2} + F_{r_3} + \ldots + F_{r_p} = F_{s_1} + F_{s_2} + F_{s_3} + \ldots + F_{s_q} \;.$$

Quitte à simplifier des deux côtés de l'égalité, on peut toujours supposer que les plus grands termes dans chaque membre sont différents : $F_{r_p} \neq F_{s_q}$. Supposons par exemple que $F_{r_p} < F_{s_q}$.

Aboutir à une contradiction et conclure.

Partie 3 : en pratique

Écrire un programme en Python qui donne la décomposition d'un entier en somme de nombres de Fibonacci non consécutifs (nous appellerons cela la *décomposition de Zeckendorf*).

Affichage souhaité pour l'exemple 56432 :

```
56432 = 46368 + 6765 + 2584 + 610 + 89 + 13 + 3
      = F22 + F18 + F16 + F13 + F9 + F5 + F2
```

3 Résultat sur lequel s'appuie la démonstration d'un théorème plus important.

Portrait « moderne » (1850)
(donc peut-être pas basé sur des sources authentiques)

Leonardo Fibonacci (v. 1175 à Pise, Italie - v. 1250) est un mathématicien italien. Il avait, à l'époque, pour nom d'usage Leonardo Pisano (il est encore actuellement connu en français sous l'équivalent « **Léonard de Pise** »), et se surnommait parfois lui-même « Leonardo Bigollo » (*bigollo* signifiant « voyageur » en italien).

Né à Pise en Italie, son éducation s'est faite en grande partie à Béjaïa en Algérie, où son père Guilielmo Bonacci était le représentant des marchands de la république de Pise. C'est dans cette ville portuaire, qui est à l'époque un centre commercial et intellectuel, que Fibonacci commence son éducation en mathématiques, utile à un futur marchand. Il étudie notamment les travaux algébriques d'Al-Khwarizmi.

Ayant aussi voyagé en Égypte, en Syrie, en Sicile, en Provence pour le compte de son père, et rencontré divers mathématiciens, Fibonacci en rapporta à Pise des connaissances importantes.

En 1201, il prouva que toute fraction $\frac{a}{b}$ pouvait se noter comme une somme de fractions distinctes dont le numérateur est 1, c'est-à-dire pouvait être représentée par une fraction égyptienne grâce à l'identité :

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}.$$

De 1202 à 1225, il est occupé par ses différents ouvrages, ayant pour objectifs de rassembler, mettre à jour et développer les connaissances qu'il a collectées jusque là.

En 1225, Fibonacci écrit le *Liber quadratorum* qui présente la résolution de divers problèmes d'arithmétique. On y trouve aussi la notion de congruence, une liste de triplets pythagoriciens ainsi qu'une approximation au millième du nombre π : 864/275.

Depuis Diophante, et jusque Fermat, personne ne fit autant progresser la théorie des nombres que Fibonacci. Il faut dire qu'après Fibonacci, la recherche mathématique ne connut pas de nouvelles envolées de tout le Moyen-âge.

Après 1228, la vie de Fibonacci nous est presque inconnue. Un seul document connu se réfère à lui. Il s'agit d'un décret daté de 1241 notifiant l'attribution par la République de Pise d'un salaire annuel de vingt lires au « sage et discret Maître Léonardo Bigollo ». Ce salaire lui fut donné en reconnaissance des services rendus à la cité et aux citoyens en qualité de conseiller. Fibonacci mourut peu après, probablement à Pise.

Le nom de Fibonacci, correspondant à « *filius Bonacii* - fils de Bonacci - en latin », lui a été attribué de manière posthume.

Sources : Wikipedia et www.bibmath.net et www.maths-et-tiques.fr