T^{le} ES / L "spé"

IE du 09/11/2018

Exercice 1 : Sujet "vert" : $f'(0) = 4$ $f'(-2) = -8$

Sujet "saumon" : $f'(1) = -11$ $f'(-2) = -5$

Exercice 2 : 1) h est un quotient de deux fonctions dérivables sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ avec le dénominateur $(2x+1)$ qui ne s'annule pas sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ donc h est dérivable sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$.

On pose $u(x) = x+5$ $u'(x) = 1$

$v(x) = 2x+1$, $v'(x) = 2$

$h = \frac{u}{v}$ donc $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$h'(x) = \frac{2x+1-(x+5)\times 2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{2x+1-2x-10}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-9}{(2x+1)^2}$$

2) i est un produit de 2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (polynômes) donc i est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = 2x^2+3$ $u'(x) = 2\times 2x = 4x$

$v(x) = 3x^3 - 7$ $v'(x) = 3\times 3x^2 = 9x^2$

$i = uv$ donc $i' = u'v + uv'$: $i'(x) = 4x(3x^3-7)+(2x^2+3)\times 9x^2$

$$= 12x^4 - 28x + 18x^4 + 27x^2$$

$$i'(x) = 30x^4 + 27x^2 - 28x$$

Exercice 3

1) k est un polynôme donc k est dérivable sur $[0;30]$

$k'(x) = 3x^2 - 30\times 2x + 225$

$k'(x) = 3x^2 - 60x + 225$

Discriminant : $\Delta = (-60)^2 - 4\times 3\times 225$

$\Delta = 900$

$\Delta > 0$ donc $3x^2 - 60x + 225$ admet 2 racines :

$$x_1 = \frac{-(-60)-\sqrt{900}}{2\times 3} = \frac{30}{6} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-60)+\sqrt{900}}{2\times 3} = \frac{90}{6} = 15$$

→

x	0		5		15		30
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
k	0	$\nearrow$	500	$\searrow$	0	$\nearrow$	6750

2) • $k'(10) = 3\times 10^2 - 60\times 10 + 225 = \underline{-75}$

• $k(10) = 10^3 - 30\times 10^2 + 225\times 10 = \underline{250}$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 10 est :

$$y = k'(10)(x-10) + k(10)$$

ie $y = -75(x-10) + 250$

ie $y = -75x + 750 + 250$

ie $\underline{y = -75x + 1000}$

3) a) $k''(x) = 3\times 2x - 60\times 1 = 6x - 60$

x	0		10		30
$k''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc k est convexe sur $[10;30]$ et concave sur $[0;10]$.

b) k'' change de signe uniquement en $x=10$ donc k admet un unique point d'inflexion de coordonnées $(10;250)$.

Exercice 4

1) ✱ • f est dérivable donc continue sur $[-0,9; x_1]$

• f est strictement décroissante sur $[-0,9; x_1]$

• $f(-0,9) = 45,3$ et $f(x_1) \simeq 2,746$

• $30 \in [2,746; 45,3]$

Donc d'après le corollaire du TVI, $f(x) = 30$ admet une unique solution sur $[-0,9; x_1]$

✱ Sur $[x_1; 10]$: $f(x_1) = 2,746$ et $f(10) = \frac{313}{11} \simeq 28,45$ (et f continue)

donc $f(x) = 30$ n'admet aucune solution sur $[x_1; 10]$.

2) a) Dans le menu TABLE de ma CASIO GRAPH 35+, par balayage, on trouve :

$$\alpha \simeq -0,856 \quad (\text{ou } \alpha \simeq -0,855).$$

b) De même, avec le menu TABLE et par balayage :

$$-0,8554 < \alpha < -0,8553.$$