II. La légende de Sissa

II.2

1. a) Calculons le « nombre de grains de blé que produirait le nombre de cases de l'échiquier », noté *N*.
$N=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$ (cette somme comporte bien 64 termes)
Il s'agit de la somme des 64 premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1, d'où : $N=1\times\dfrac{1-2^{64}}{1-2}$ soit $N=2^{64}-1$.

b) On retrouve le résultat du nombre exact de déplacements nécessaires pour résoudre le jeu des tours de Hanoï à 64 disques.

2. • D'abord, 2^{64} est pair, donc $2^{64}-1$ est impair, alors que *E* est pair ! Donc $N\neq E$.

• Pour calculer l'erreur commise en évaluant *N* par *E*, il faudrait calculer $N-E$.
Or, les calculatrices dont nous disposons ne donnent pas la valeur exacte de ce calcul.

1ère solution : ***utiliser un ordinateur plutôt qu'une calculatrice***
Utiliser la calculatrice fournie avec le système d'exploitation, ou la calculatrice d'un logiciel de calcul comme Xcas.
On trouve alors :

```
2^64-1-3145740*1024*174762*32768
                                                268435455
```

2ème solution : ***utiliser les capacités maximales de la calculatrice et finir les calculs « à la main »***
$2^{64}-1=(2^{32})^2-1$.
Or $2^{32}=4\,294\,967\,296$ donc on pose la multiplication $4\,294\,967\,296\times4\,294\,967\,296$, on trouve $18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$, d'où le résultat : $2^{64}-1=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.
De même, pour calculer *E* : $E=\underbrace{3\,145\,740\times1\,024}\times\underbrace{174\,762\times32\,768}$

$$=3\,221\,237\,760\times5\,726\,601\,216$$

et en posant cette multiplication, on trouve : $E=18\,446\,744\,073\,441\,116\,160$.
Et finalement, on pose l'addition : $N-E=18\,446\,744\,073\,709\,551\,615-18\,446\,744\,073\,441\,116\,160$
et l'on trouve $N-E=268\,435\,455$.

L'erreur commise en évaluant *N* par *E* est donc de $268\,435\,455$ … C'est beaucoup !

3ème solution : ***décomposer astucieusement en faisant apparaître des puissances de 2***

$$E = 3\,145\,740 \times \underbrace{1024}_{=2^{10}} \times 174\,762 \times \underbrace{32\,768}_{=2^{15}}$$

* $3\,145\,740 = 1048$
$$= (1\,048\,576 + 4) \times 3$$
$$= (2^{20} + 4) \times 3$$
$$= \underline{2^{20} \times 3 + 12}$$

* $174\,762 = 131\,072 + 43\,690$
$$= 2^{17} + (32\,768 + 10\,922)$$
$$= 2^{17} + 2^{15} + (8\,192 + 2\,730)$$
$$= 2^{17} + 2^{15} + 2^{13} + (2\,048 + 682)$$
$$= 2^{17} + 2^{15} + 2^{13} + 2^{11} + (512 + 170)$$
$$= 2^{17} + 2^{15} + 2^{13} + 2^{11} + 2^{9} + 42$$
$$= \dots$$
$$= 2^{17} + 2^{15} + 2^{13} + 2^{11} + 2^{9} + 2^{7} + 2^{5} + 2^{3} + 2^{1}$$

adore !

Cette somme est la somme des $\left(\frac{17-1}{2} + 1\right) = 9$ termes consécutifs d'une suite géométique de raison $q = 2^2 = 4$, soit

$$2^1 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + 2^9 + 2^{11} + 2^{13} + 2^{15} + 2^{17} = 2 \times \frac{1 - 4^9}{1 - 4}$$
$$= -\frac{2}{3}\left(1 - 4^9\right)$$
$$= \frac{2}{3}\left(4^9 - 1\right)$$
$$= \frac{2}{3}\left[(2^{18} - 1\right] = \frac{1}{3}\left[(2^{19}) - 2)\right]$$

donc, $E = \left[(2^{20} \times 3) + 12\right] \times 2^{10} \times \left[\frac{1}{3} \times \left((2^{19}) - 2\right)\right] \times 2^{15}$

$= 2^{25} \times (3 \times 2^{20} + 12) \times \left[\frac{1}{3} \times (2^{19} - 2)\right]$

$= \left[3 \times 2^{45} + 12 \times 2^{25}\right]\left[\frac{1}{3} \times (2^{19} - 2)\right]$

$= \left[3 \times 2^{45} + 12 \times 2^{25}\right]\left[\frac{2^{19}}{3} - \frac{2}{3}\right]$

$= (2^{45} \times 2^{19}) - (2^{45} \times 2) + (4 \times 2^{25} \times 2^{19}) - (8 \times 2^{25})$

$= 2^{64} - 2^{46} + (2^{2} \times 2^{25} \times 2^{19}) - (2^{3} \times 2^{25})$

$= 2^{64} - \cancel{2^{46}} + \cancel{2^{46}} - 2^{28}$

$= \underline{2^{64} - 2^{28}}$

d'où, $N - E = (2^{64} - 1) - (2^{64} - 2^{28})$

$= -1 + 2^{28} = -1 + 268\,435\,456 = \underline{268\,435\,455}$

Soit, $N = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$

et, $E = 2^{64} - 2^{28} = 18\,446\,744\,073\,441\,116\,160$