I. Les tours de Hanoï

I.1

1. a) Avec une tour à 4 étages, le nombre minimal de manipulations pour reconstruire la tour est 15.

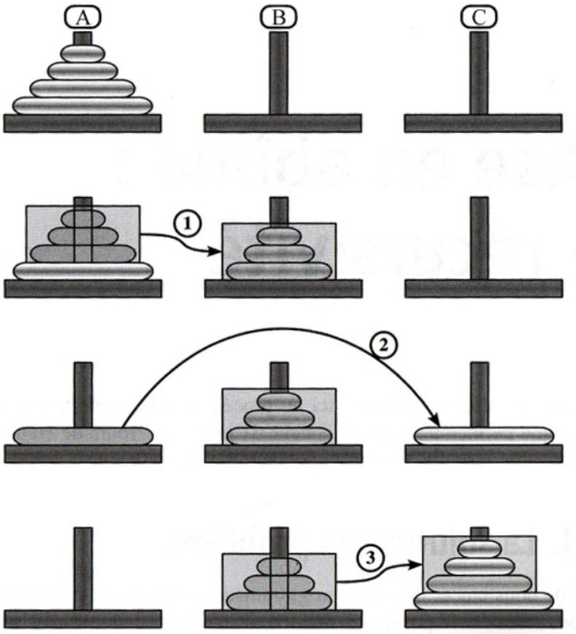
b) Avec une tour à 5 étages, le nombre minimal de manipulations pour reconstruire la tour est 31.

2. a) Soient A, B et C les trois emplacements des tours ; notons x_n le nombre de déplacements de disques nécessaires au déplacement d'une tour complète. Pour déplacer une tour de n disques de A vers C, on effectue ces trois étapes :

- déplacer la tour des $n-1$ premiers disques de A vers B (étape qui nécessite x_{n-1} déplacements) ;
- déplacer le plus grand disque de A vers C (un déplacement supplémentaire) ;
- déplacer la tour des $n-1$ premiers disques de B vers C (à nouveau x_{n-1} déplacements).

Le nombre de déplacements de disques vérifie donc la relation de récurrence :

$$u_1=1 \text{ et } u_{n+1}=2u_n+1 \text{ pour } n\geqslant 2 .$$



b) Avec la relation de récurrence précédente, on trouve :

$$u_1=1 \;;\; u_2=5 \;;\; u_3=7 \;;\; u_4=15 \;;\; u_5=31 \;;\; u_6=63 \;;\; u_7=127 \;; \text{etc.}$$

On conjecture alors : $u_n=2^n-1$.

Démonstration de notre conjecture :
On note $\mathrm{P}(n)$: « $u_n=2^n-1$ ».

Initialisation

$u_1=1$ et $2^1-1=1$ donc $\mathrm{P}(1)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (fixé). On suppose que $\mathrm{P}(n)$ est vraie : $u_n=2^n-1$.
Montrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1}=2^{n+1}-1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1}&=2u_n+1\\ &=2(2^n-1)+1 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &=2^{n+1}-2+1\\ &=2^{n+1}-1 \textit{ (ce qu'il fallait démontrer)}\end{aligned}$$

Conclusion

Donc, d'après le raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n=2^n-1$.

I.2

Comme indiqué au I.1, un jeu à 64 disques requiert un minimum de $2^{64}-1$ déplacements.
Or, $24\,h=24\times60\times60\,s=86\,400\,s$.
S'il faut 1 seconde pour déplacer un disque, cela fait donc $86\,400$ déplacements par jour.
Or, d'après la calculatrice : $\dfrac{2^{64}-1}{86\,400}\approx2{,}13504\times10^{14}$, soit $213\,504\times10^{9}$.
La fin du jeu aurait donc lieu au bout d'environ $213\,504$ milliards de jours.
Ou encore, puisqu'une année (dans le calendrier grégorien utilisé actuellement) correspond à 365,2425 jours et que $\dfrac{213\,504\times10^{9}}{365{,}2524}\approx5{,}8454\times10^{11}$, cela équivaut à environ 584,5 milliards d'années.
L'âge estimé de l'univers à 13,7 milliards d'années donne alors un équivalent d'environ 43 fois l'âge de l'univers car $\dfrac{584{,}5}{13{,}7}\approx42{,}66$.