*Pré-requis : suites (1°s) et raisonnement par récurrence*

## 88 D'après *Bac S*, Antilles-Guyane, 2010.

On considère la suite de nombres réels $(u_n)$ définie par :

$u_0 = -1$ , $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ .

**1.** Calculer $u_2$ et en déduire que la suite $(u_n)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

**2.** On définit la suite $(v_n)$ en posant, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

**a.** Exprimer $v_{n+1}$ en fonction de $v_n$.

**b.** En déduire que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

**c.** Calculer $v_0$ puis exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

**3.** On définit la suite $(w_n)$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$w_n = \frac{u_n}{v_n}$$

**a.** En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ , exprimer $w_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et de $v_n$.

**b.** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

**c.** Calculer $w_0$ puis exprimer $w_n$ en fonction de $n$.

**4.** Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ .

**5.** Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$