88 PAGE 62 (ODYSSÉE, T^LE S, ÉD. 2012)

Pré-requis : suites (1°s) et raisonnement par récurrence

88 D'après *Bac S*, Antilles-Guyane, 2010.

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie par :
$u_0=-1$, $u_1=\frac{1}{2}$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour $n\in\mathbb{N}$:
$$v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$$
a. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
b. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
c. Calculer v_0 puis exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$w_n=\frac{u_n}{v_n}$$
a. En utilisant l'égalité $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
b. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_{n+1}=w_n+2$.
c. Calculer w_0 puis exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose :
$$S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$$
Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$$

1. • $u_2=u_1-\frac{1}{4}u_0=\ldots=\frac{3}{4}$

• $\frac{u_1}{u_0}=\ldots=-\frac{1}{2}$ et $\frac{u_2}{u_1}=\ldots=\frac{3}{2}$

donc (u_n) n'est pas géométrique.

• $u_1-u_0=\ldots=\frac{3}{2}$ et $u_2-u_1=\ldots=\frac{1}{4}$

donc (u_n) n'est pas arithmétique.

2. a) $$\begin{aligned}v_{n+1}&=u_{n+2}-\frac{1}{2}u_{n+1}\\&=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n-\frac{1}{2}u_{n+1}\\&=\frac{1}{2}u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n\\&=\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right)\\&=\frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

b) $\forall\ n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$

donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c) $v_0=u_1-\frac{1}{2}u_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$\forall\ n\in\mathbb{N},\ v_n=v_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ie $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. a) $w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=\frac{v_n+\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}=\frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n}+\frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}=2+\frac{u_n}{v_n}$.

b) $w_n=\frac{u_n}{v_n}$ donc d'après la question précédente : $w_{n+1}=w_n+2$.

c) $w_0=\ldots=-1$
(w_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0=-1$
donc, pour tout entier naturel n : $w_n=-1+2n$.

4. $w_n=\dfrac{u_n}{v_n}$ donc $u_n=w_n v_n$ *ie* $u_n=(-1+2n)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *ie* $u_n=\dfrac{2n-1}{2^n}$.

5. On pose P(n) : « $\mathrm{S}_n=2-\dfrac{2n+3}{2^n}$ ».

• **<u>Initialisation</u>** : $n=0$

$\mathrm{S}_0=u_0=-1$ et $2-\dfrac{2\times 0+3}{2^0}=2-3=-1$

donc $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

• **<u>Hérédité</u>** : soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\mathrm{P}(n)$ est vraie.

$\mathrm{S}_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1} u_k$

$=u_{n+1}+\sum_{k=0}^{n} u_k$

$=\dfrac{2(n+1)-1}{2^{n+1}}+2-\dfrac{2n+3}{2^n}$ d'après la question 4. et l'hypothèse de récurrence

$=2+\dfrac{2n+2-1}{2^{n+1}}-\dfrac{(2n+3)\times 2}{2^{n+1}}$

$=2+\dfrac{2n+1-4n-6}{2^{n+1}}$

$=2+\dfrac{-2n-5}{2^{n+1}}$

$=2-\dfrac{2n+5}{2^{n+1}}$

$=2-\dfrac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}$

donc $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

• **<u>Conclusion</u>** : d'après le raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n, $\mathrm{P}(n)$ est vraie

ie $\mathrm{S}_n=2-\dfrac{2n+3}{2^n}$.