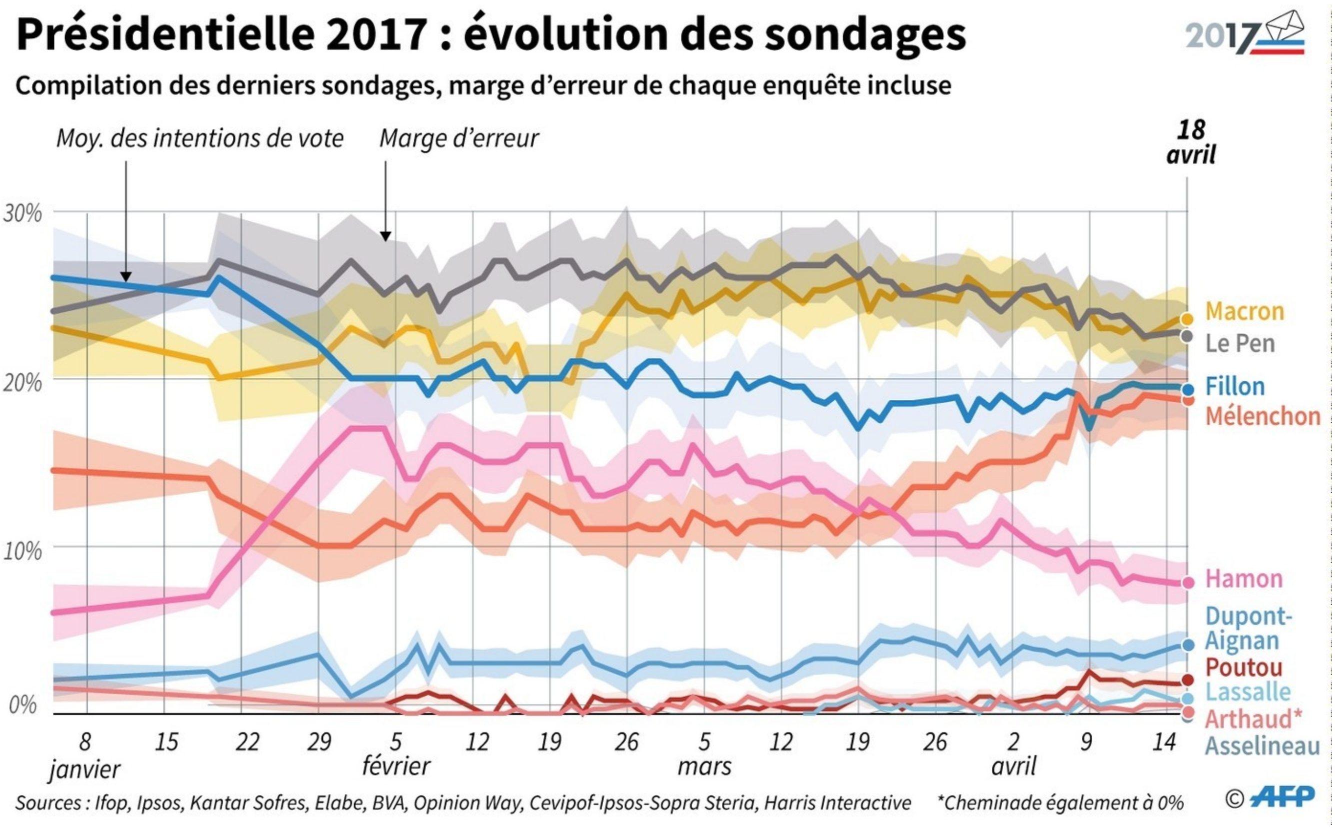
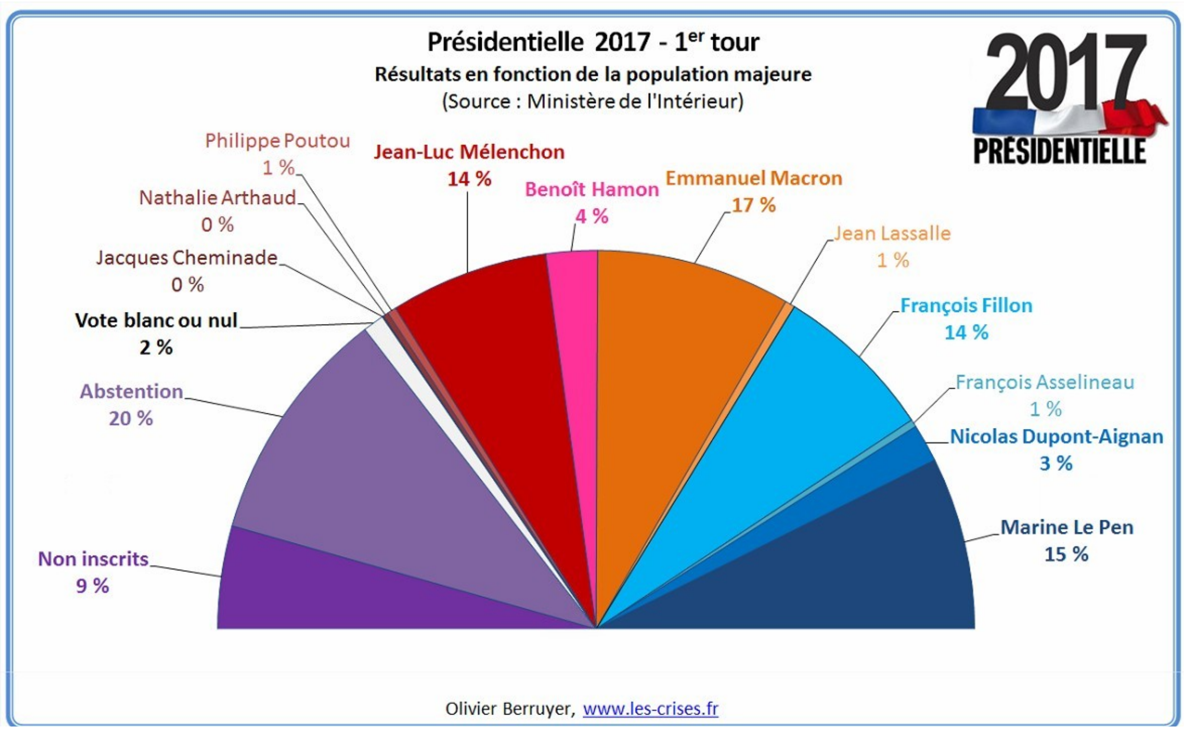
ESTIMATION : INTERVALLE(S) DE CONFIANCE





I. De la fluctuation d'échantillonnage à un intervalle aléatoire

PROPRIÉTÉ. Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n;p)$. On note $F_n = \frac{X_n}{n}$.
Lorsque n est assez grand, l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion p avec une probabilité environ égale à 0,95.

Démonstration : On a dès la Seconde que : $p\left(F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \approx 0{,}95$.

Or : $F_n \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow$

Donc la probabilité pour que l'intervalle aléatoire $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contienne p est environ égale à 0,95.

II. Un intervalle de confiance au niveau 0,95

On souhaite connaître, dans une population, la valeur d'une proportion p (proportion des gauchers en France, intentions de vote pour une élection, …).
Pour des raisons matérielles, financières ou autres[1], on ne peut pas toujours réunir les données concernant la population tout entière.
On va donc ***estimer la proportion p que l'on cherche à partir de la fréquence f observée dans un échantillon***.

Rappel : on sait que cette fréquence observée va varier d'un échantillon à l'autre, c'est la fluctuation d'échantillonnage autour de p.

Grâce aux propriétés précédentes, on a vu que :

Si n est assez grand, la probabilité qu'un échantillon de taille n de cette population ait une fréquence f qui appartienne à l'intervalle de fluctuation $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est strictement supérieure à 95 %.
C'est la fluctuation d'échantillonnage.

Soit p une proportion inconnue dans une population.
Pour un échantillon de taille n de cette population, on calcule la fréquence f.
Alors la probabilité que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contienne p est strictement supérieure à 95 %.

1 par exemple, on ne peut pas tester le bon fonctionnement de toutes les allumettes d'une production car dans ce cas tester une allumette amène à la détruire...

Autrement dit, parmi tous les échantillons de taille n qu'on peut obtenir, au moins 95 % d'entre eux sont tels que l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion p.

On dit donc que $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *est* ***un intervalle de confiance*** *de la proportion inconnue* p *à un niveau de confiance de 0,95.*

DÉFINITION.

Soit f la fréquence observée d'un caractère dans un échantillon de taille n extrait d'une population dans laquelle la proportion de ce caractère est p (inconnue).

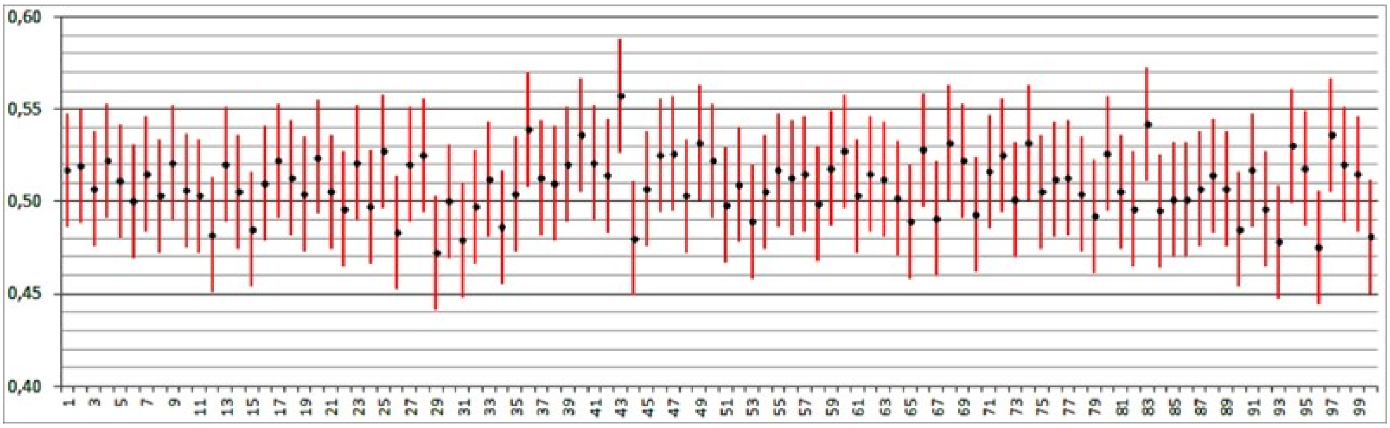
L'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}} ; f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est ***un intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance de 0,95***.

On admet que l'on « peut » utiliser cet intervalle lorsque :

$$n \geqslant 30 \quad ; \quad n f \geqslant 5 \quad ; \quad n(1-f) \geqslant 5 .$$

(les conditions sur p de l'int. de fluct. sont appliquées à f)

ATTENTION : à chaque tirage d'un échantillon, on obtient un intervalle de confiance différent.
Et un intervalle de confiance peut ne pas contenir p. Un exemple :



Il s'agit d'une suite de 100 intervalles de confiance au niveau de confiance 0,95, dont chacun a été calculé sur un échantillon de taille 1000 simulé à partir de ce que fut le score de Barack Obama à l'élection présidentielle aux U.S.A. en 2012, à savoir 0,51 : dans cette simulation on observe 96 intervalles auxquels appartient la valeur 0,51 (dont 2 auxquels elle n'appartient que « de justesse ») .

Source : http://images.math.cnrs.fr/Intervalles-de-confiance-le-debat.html

A SAVOIR

1. Il est incorrect de conclure la détermination d'un intervalle de confiance par la phrase « p a une probabilité de 0,95 d'être entre $f-\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $f+\frac{1}{\sqrt{n}}$ » car il n'y a plus d'aléatoire à ce stade : p est inconnue mais ne varie pas !
C'est pourquoi, plutôt que de parler de « probabilité », on a choisi le mot « confiance » :

« L'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance
de la proportion inconnue p au niveau de confiance 0,95 ».

2. La précision de l'estimation est donnée par l'amplitude de l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, qui est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.
Cette valeur dépend donc uniquement de n, pas de la taille de la population totale[2].
Si on veut une précision de a, on cherche à partir de quel n on a : $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant a$.
Or : $\frac{2}{\sqrt{n}}\leqslant a \Leftrightarrow n\geqslant\frac{4}{a^2}$.
Voici quelques exemples :

a	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01
n					1112					

Donc, avec un niveau de confiance de 0,95, pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,06, il faut un échantillon de taille 1112 au moins.

III. Complément : un autre intervalle de confiance

Dans les démonstrations, nous avons utilisé le résultat suivant, facile à démontrer :

$$F_n\in\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]\Leftrightarrow p\in\left[\mathrm{F}_n-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\mathrm{F}_n+\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

Mais si on utilise l'intervalle de fluctuation de Terminale, c'est beaucoup plus difficile d'encadrer p …
En effet, écrire $\mathrm{F}_n\in\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ ne permet pas d'encadrer p.

D'après le programme scolaire, « il est important de noter que, dans d'autres champs disciplinaires, on utilise l'intervalle $\left[f-1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\,;f+1{,}96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$, qu'il n'est pas possible de justifier en Terminale ».

2 Ce qui peut étonner… Mais comme l'a dit Jean-Louis Boursin dans « les structures du hasard » : pour goûter un plat, il suffit d'en goûter une petite quantité ; cette quantité ne dépend pas de la taille du récipient (mais il faut néanmoins avoir bien mélangé) !