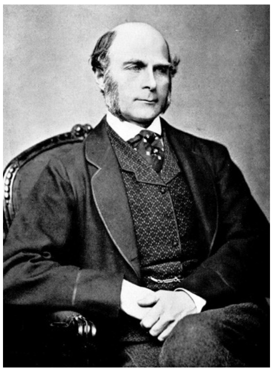
LOIS À DENSITÉ (PARTIE 2) : LES LOIS NORMALES

Un billet de dix Deutsche Mark, avec Carl Friedrich Gauss (1777-1855).



← Laplace (1749 – 1827) →



Galton (1822 – 1911)

← Quételet (1796 – 1874) →

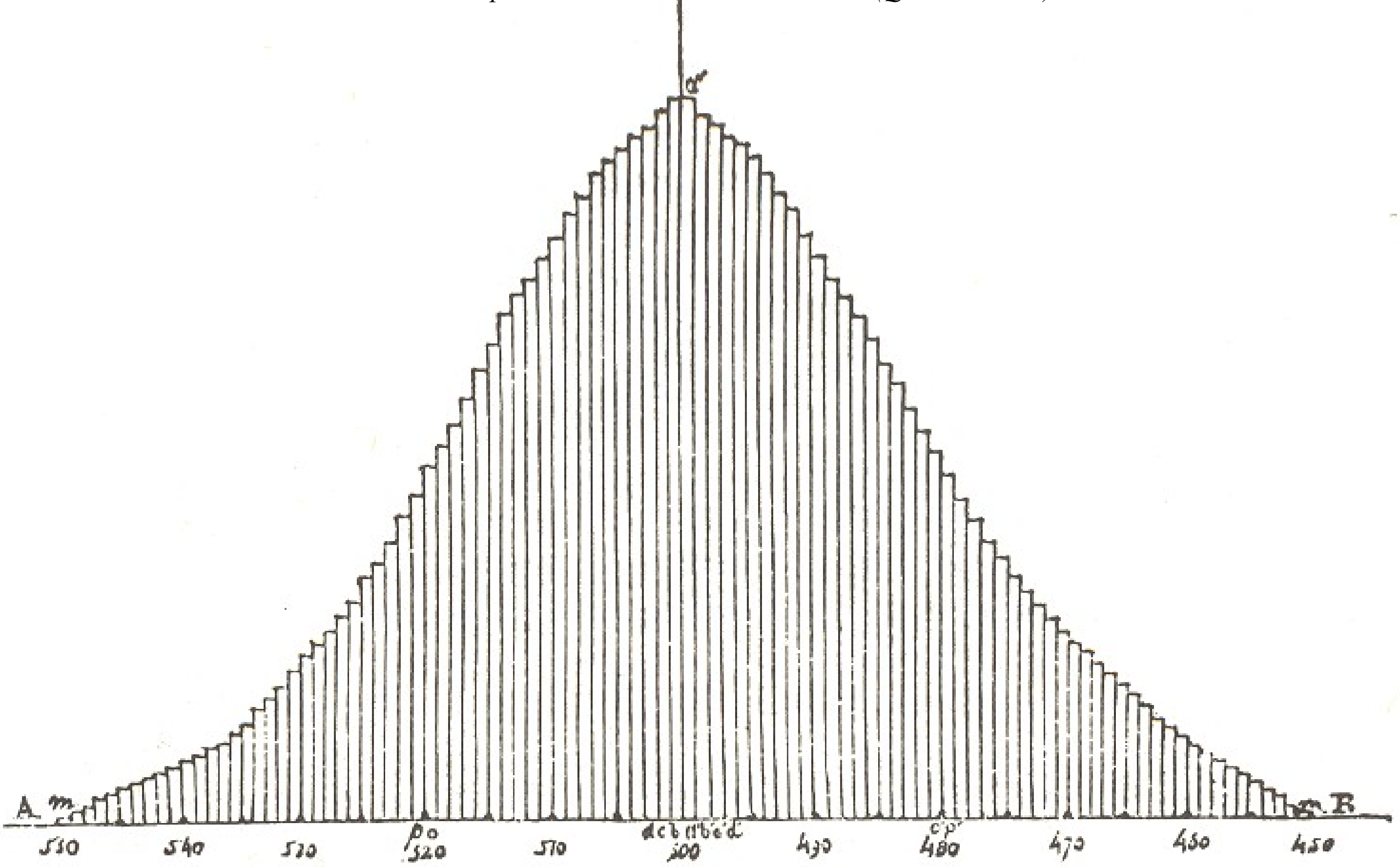


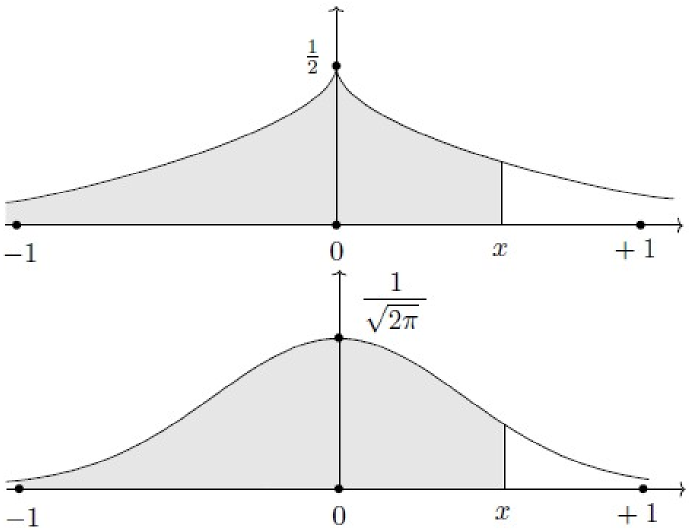
Pearson (1857 – 1936)

De Moivre (1667 – 1754)

Gauss (1777 – 1855)

le tour de poitrine de 5738 soldats écossais (Quételet, 1846)





Première et deuxième lois de Laplace

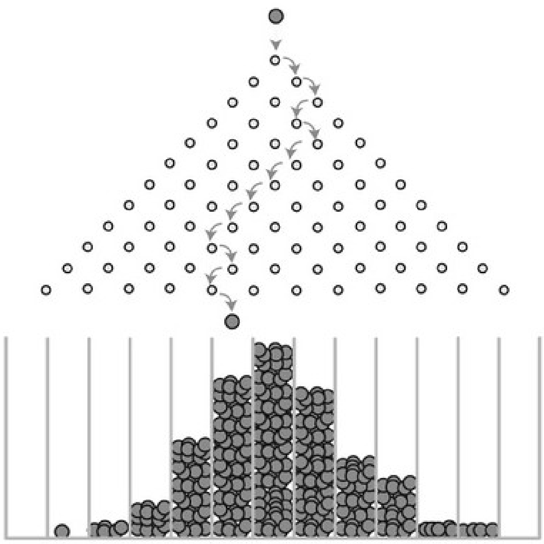


Planche de Galton

I. Loi normale centrée réduite

THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE. *Admis*

Soit $p \in \left]0;1\right[$ (réel fixé). Soit X_n une v.a.r. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors, pour tous nombres réels a et b tels que $a<b$:

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{p}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$$

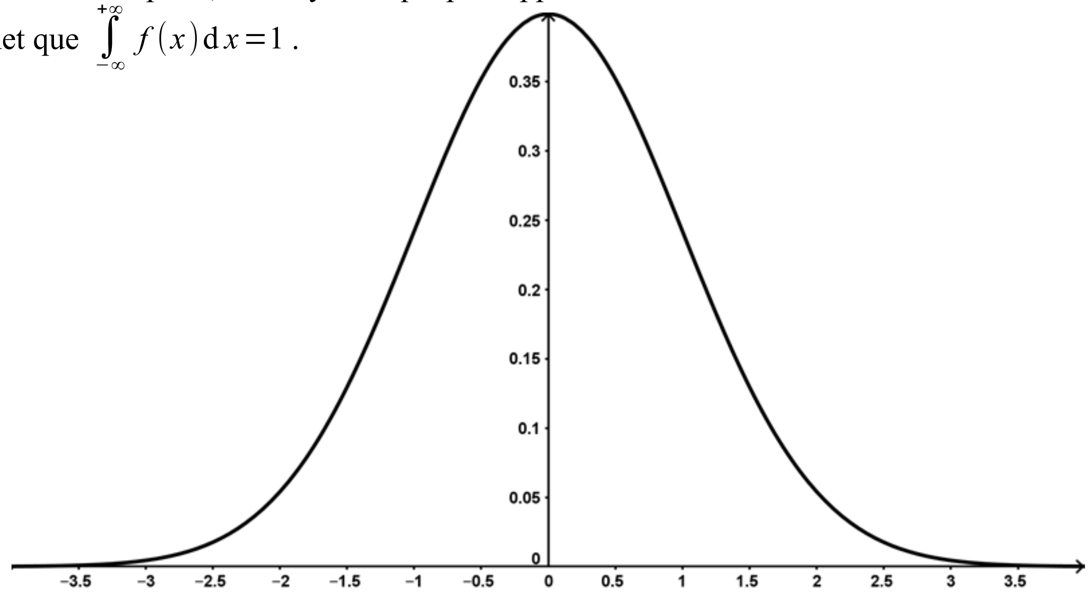
où Z_n est la v.a.r. définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Autrement dit, ce théorème justifie que sous certaines conditions sur les paramètres n et p, la probabilité d'un événement associé à une loi binomiale peut être approché par la probabilité d'un événement associé à la loi normale centrée réduite.
On parle alors d'***approximation d'une loi binomiale par une loi normale***.

Remarque : en fait, ce phénomène n'est pas spécifique à la loi binomiale… une loi normale intervient dans « la modélisation de nombreux phénomènes aléatoires possédant de nombreuses causes indépendantes dont les effets s'ajoutent, sans que l'une d'elles soit dominante ». Donc dans une situation de répétition d'expériences identiques et indépendantes. [voir compléments]

DÉFINITION. On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi normale centrée réduite*** si sa densité est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. On note X ~ $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Remarques :
- f est continue et paire, donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.



- l'espérance de X_n est np, notée μ, et son écart-type est $\sqrt{np(1-p)}$, noté σ.

Alors, d'après le théorème de Moivre-Laplace :

si n est assez grand, on peut approcher $\mathrm{p}\left(a \leqslant \dfrac{X_n - \mu}{\sigma} \leqslant b\right)$ par $\mathrm{p}(a \leqslant \mathrm{T} \leqslant b)$ où T ~ $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Admise

PROPRIÉTÉ.

Soit X une v.a.r. suivant la loi normale centrée réduite. Alors : $E(X)=0$ et $\sigma(X)=1$.

PROPRIÉTÉS.

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

- Pour tout réel $u>0$: $p(T\leqslant -u)=p(T\geqslant u)$ et $p(-u\leqslant T\leqslant u)=2\,p(T\leqslant u)-1$.
- $p(T\geqslant 0)=p(T\leqslant 0)=\frac{1}{2}$.

<u>Démonstration</u> : • $p(T\leqslant -u)=p(T\geqslant u)$ est une conséquence de la symétrie de la courbe, tout comme $p(T\geqslant 0)=p(T\leqslant 0)=\frac{1}{2}$.

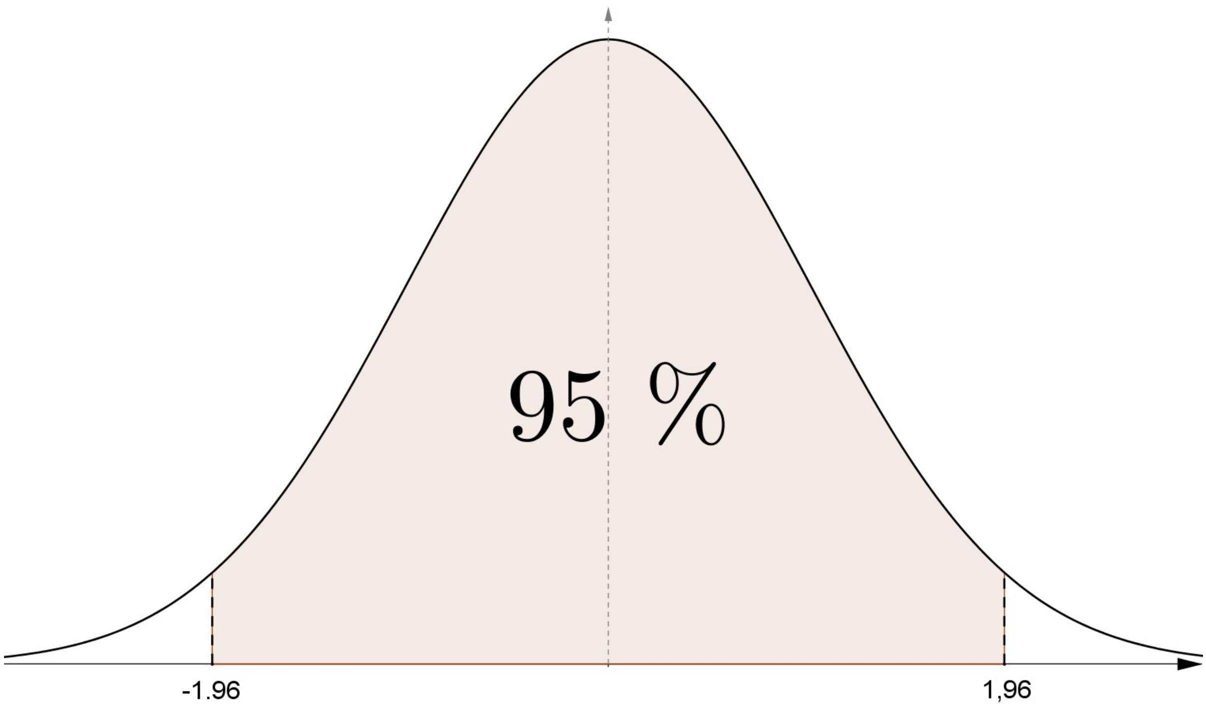
• $p(-u\leqslant T\leqslant u)=$

Admise

PROPRIÉTÉ.

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

$$p(-1{,}96\leqslant T\leqslant 1{,}96)\approx 0{,}95.$$

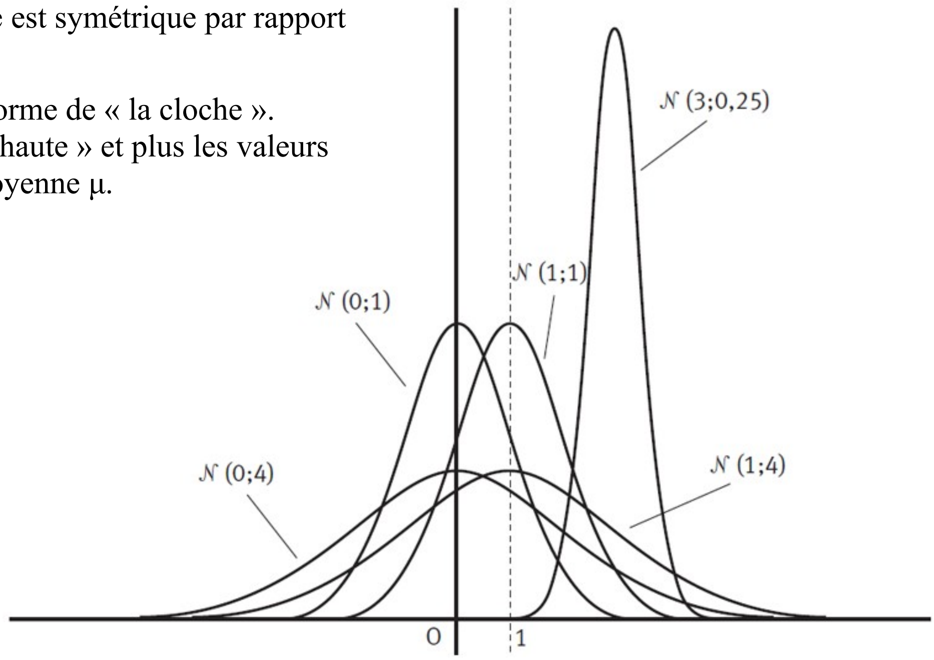


II. Loi normale

DÉFINITION. On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi normale d'espérance*** μ ***et d'écart-type*** σ si la v.a.r. $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

On observe que chaque courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$.

L'écart-type a un effet sur la forme de « la cloche ». Plus σ est petit, plus elle est « haute » et plus les valeurs sont resserrées autour de la moyenne μ.



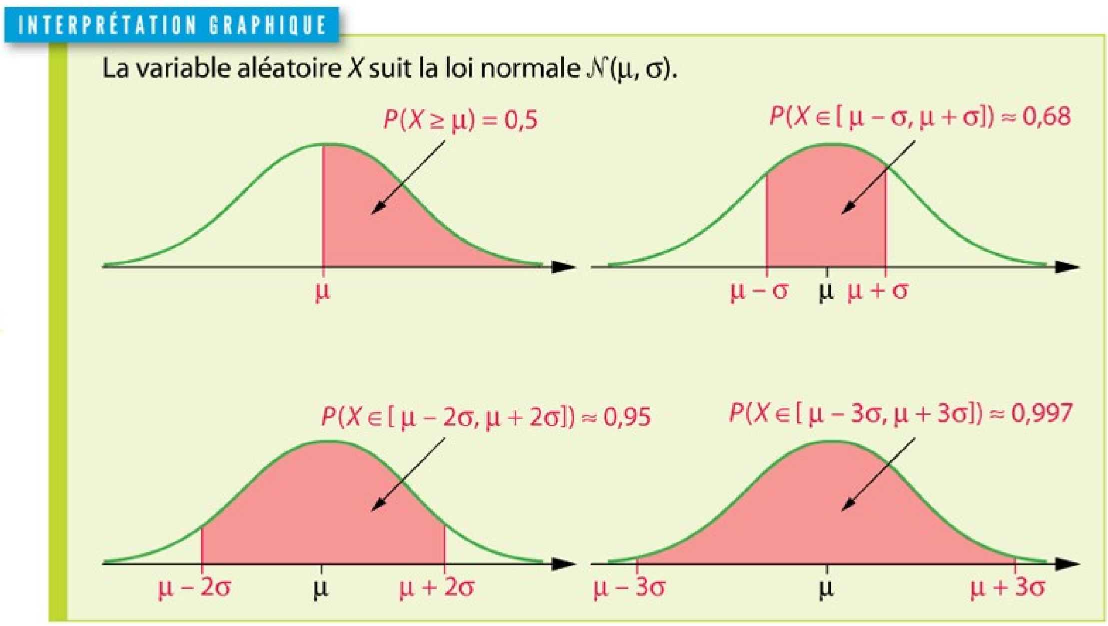
Remarque : si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors on a $E(X)=\mu$.

PROPRIÉTÉS. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Alors :
- $p(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \approx 0{,}68$
- $p(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$
- $p(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$.

Démonstrations : On pose $T \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$p(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) = p\left(-1 \leqslant \dfrac{X-\mu}{\sigma} \leqslant 1\right) = p(-1 \leqslant T \leqslant 1) \approx 0{,}68$. Idem pour les autres.



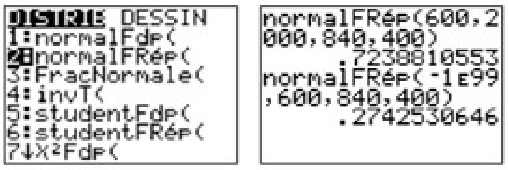
Source : Collection Sigma, éditions Foucher, avril 2013

III. Avec la calculatrice

LOIS DE PROBABILITÉ AVEC LA CALCULATRICE

Loi normale avec une calculatrice TI

On accède au menu « distribution » par 2nde/Distrib (ou DISTR).
Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on utilise normalFRép ou normalcdf.
Si l'une des bornes a ou b est absente, on la remplace par −1E99 ou 1E99.



Loi normale avec une calculatrice Casio

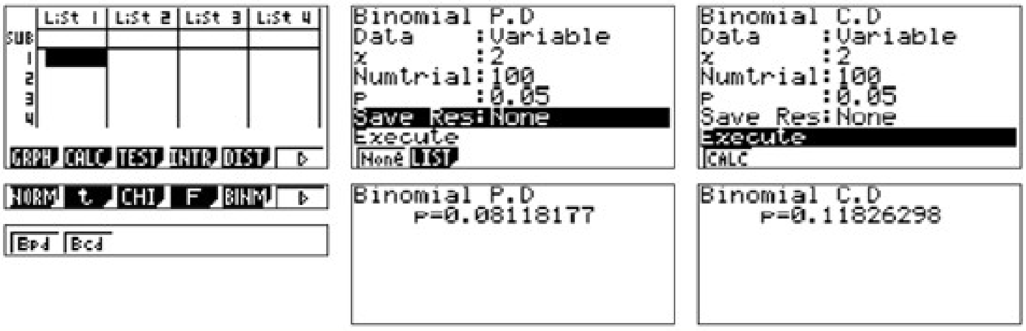
On se place dans le Menu STAT.
On accède à la loi normale par DIST/NORM.
Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$, on utilise Ncd.
Si l'une des bornes a ou b est absente, on la remplace par −1E99 ou 1E99.

Loi binomiale avec une calculatrice TI

On accède au menu « distribution » par 2nde/Distrib (ou DISTR).
Pour calculer $P(X = k)$, on utilise l'instruction binomFdp ou binompdf.
Pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise l'instruction binomPRép ou binomcdf.

Loi binomiale avec une calculatrice CASIO

On se place dans le Menu STAT.
On accède à la loi binomiale par DIST/BINM.
Pour calculer $P(X = k)$, on utilise l'instruction Bpd.
Pour calculer $P(X \leq k)$, on utilise l'instruction Bcd.



Source : Collection Sigma, éditions Foucher, avril 2013

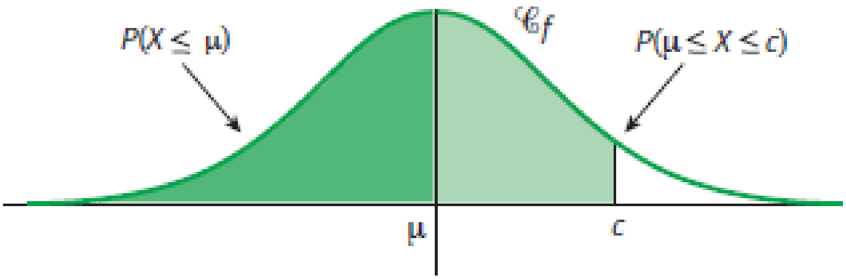
Si vous préférez une vidéo : https://youtu.be/qh31hHKsaIA

ATTENTION : **Bpd** permet de calculer $p(X=k)$ pour X qui suit une loi binomiale.
mais **Npd** permet de calculer $f(k)$ avec f la densité d'une loi normale !
Pour calculer $p(Z=k)$ avec Z qui suit une loi normale, il faut utiliser **Ncd**, avec Lower = k et Upper = k.

Pour calculer $p(X \leqslant c)$, on a donc deux méthodes :

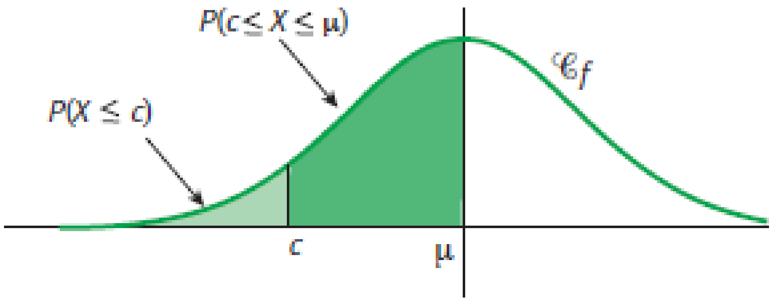
• Utiliser l'approximation $p(X \leqslant c) \approx p(-10^{99} \leqslant X \leqslant c)$.

• Utiliser les propriétés de symétrie de la courbe, selon la position de c par rapport à μ…



Si $c \geq \mu$:

$$P(X \leq c) = P(X < \mu) + P(\mu \leq X \leq c) = \frac{1}{2} + P(\mu \leq X \leq c)$$



Si $c \leq \mu$:

$$P(X \leq c) = P(X \leq \mu) - P(c < X \leq \mu) = \frac{1}{2} - P(c \leq X \leq \mu).$$

<u>Exercice III.1</u> : soit X une v.a.r. suivant la loi normale $\mathcal{N}(46{,}75\,;6{,}23^2)$. Avec la calculatrice, calculer :

1. $p(40 \leqslant X \leqslant 60)$

2. $p(X \leqslant 60)$ de deux façons différentes

3. $p(X > 40)$ de deux façons différentes

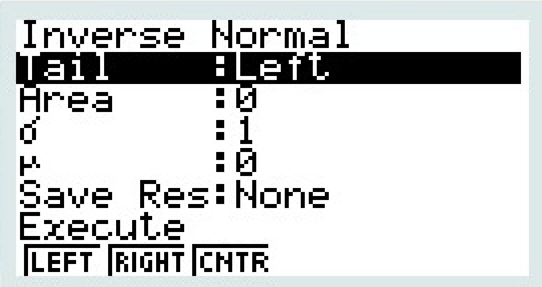
4. $p(X \geqslant 60)$ de deux façons différentes.

Exercice III.2 : soit X une v.a.r. suivant la loi normale $\mathcal{N}\ (46{,}75\,;6{,}23^2)$.
Avec l'aide ci-dessous, déterminer une valeur approchée du réel k tel que :

1. $p(X \leqslant k)=0{,}75$ **2.** $p(X<k)=0{,}95$ **3.** $p(X \geqslant k)=0{,}95$.

A I D E

• **Sur CASIO** : utiliser le menu STAT
Menu DIST puis NORM et InvN. Un menu « Inverse Normal » s'ouvre :



Tail vous permet de choisi *Left*, *Right* ou *Central*.
Cela dépend de si vous voulez déterminer *k* tel que $p(X \leqslant k)$, $p(X \geqslant k)$ ou $p(-k \leqslant X \leqslant k)$.

Area correspond à la probabilité que vous souhaitez.

μ et σ sont bien sûr les paramètres de la loi normale $\mathcal{N}$(μ , σ²).

Pour voir en vidéo trois exemples avec cette méthode : https://youtu.be/pWehWIpVBPE

• **Sur TI** : https://youtu.be/aipNt2M-c80

B I L A N À R E T E N I R

Soit X_n une v.a.r. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}$ (*n ; p*).
D'après le théorème de Moivre-Laplace :

- si *n* est assez grand, on peut approcher $p\left(a \leqslant \dfrac{X_n-\mu}{\sigma} \leqslant b\right)$ par $p(a \leqslant T \leqslant b)$ où T ~ $\mathcal{N}$(0 ; 1).

- si *n* est assez grand, on peut approcher $p(a \leqslant X_n \leqslant b)$ par $p(a \leqslant Z \leqslant b)$ où Z ~ $\mathcal{N}$ (μ ; σ²).