# LOIS À DENSITÉ (PARTIE 1)
# THÉORIE + LES LOIS UNIFORMES



## I. Loi à densité : la théorie

### I.1 Variable aléatoire continue

DÉFINITIONS. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.
Une ***variable aléatoire*** est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans ℝ. On la note souvent X.

Une variable aléatoire qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle I de ℝ est dite ***continue***.

*Exemples* :

- Un joueur lance un dé équilibré à six faces. S'il obtient 1, 2 ou 3, il perd 5 €.
  S'il obtient 4 ou 5, il gagne 1 €. S'il obtient 6, il gagne 10 €.
  On peut définir la variable aléatoire « gain algébrique » X du joueur.
  Cette v.a.r. (*variable aléatoire réelle)* est définie sur l'univers Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}, et X(Ω) = {-5 ; 1 ; 10}.
  C'est donc une v.a.r. ***discrète***.

- Exemples de variables aléatoires ***continues*** :

  – Variable correspondant à la taille d'un élève

  – Variable correspondant à la longueur d'un train,

  – Variable correspondant au temps d'attente à une caisse

  – Variable correspondant à la durée de vie d'une personne dans une ville donnée

  – Variable correspondant au poids à la naissance d'un bébé, exprimé en kg

  – La v.a.r. égale à la durée de fonctionnement d'une ampoule électrique (en heures)

  – La v.a.r. égale à la durée de communication téléphonique (en h) d'un 16-25 ans

  – L'instruction ALEA() sur un tableur (ou RAND# sur une calculatrice) donne un nombre au hasard compris entre 0 et 1.
  Ces instructions définissent une v.a. continue prenant ses valeurs dans [0 ; 1[.

### I.2 Fonction de densité

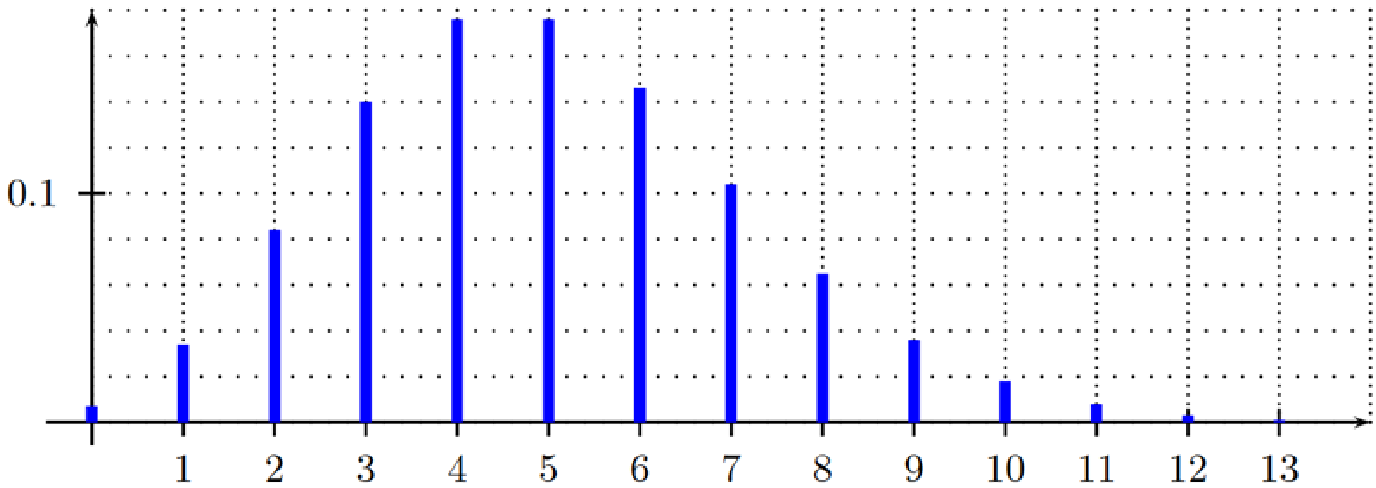
Pour une v.a.r. discrète, la loi de probabilité est généralement donnée sous la forme d'un tableau…

| Valeurs de $X$ : $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité : $p(X = x_i)$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | ... | $p_n$ |

… ou une formule, par exemple pour la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$ : $\mathrm{p}(\mathrm{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Pour une v.a.r. discrète, la loi de probabilité vérifie : pour tout i, $\mathrm{p}(\mathrm{X}=x_\mathrm{i})\geqslant 0$ ; et $\sum_\mathrm{i} \mathrm{p}(\mathrm{X}=x_\mathrm{i})=1$.

On peut par ailleurs représenter une telle loi par un diagramme en bâtons :




Par analogie, pour une v.a.r. continue, on utilisera des fonctions, continues à valeurs positives, et les probabilités des intervalles seront données par des aires, c'est-à-dire par des intégrales.

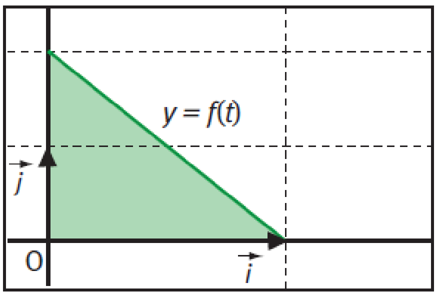
DÉFINITION.

Soit I un intervalle. Une fonction *f* définie sur I est appelée ***fonction de densité*** sur I lorsque :

- *f* est continue sur I (*sauf éventuellement en un nombre fini de points*)
- *f* est positive sur I
- $\int_\mathrm{I} f(x)\,\mathrm{d}x=1$

(l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe rep. de *f* et l'axe des abscisses est égale à 1 u.a.)

Attention :




Une fonction de densité peut prendre des valeurs supérieures à 1.

$f$ n'est pas une probabilité, mais une densité de probabilité.

### I.3 Probabilité d'un événement

DÉFINITION.
Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire et I un intervalle.
Soit X une variable aléatoire continue de densité $f$, définie sur Ω et à valeurs dans I.
Pour tout intervalle J inclus dans I, la probabilité de l'événement $\{ X \in J \}$ est l'aire du domaine suivant : $\{ M(x;y),\ x \in J \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x) \}$.
Autrement dit : $\boxed{p(X \in J) = \int_J f(x)\,dx}$.

On admet que l'on peut prolonger la loi de probabilité à toute union finie d'intervalles de telle sorte que l'on ait la propriété :

PROPRIÉTÉ.
Si $J$ et $J'$ sont deux unions d'intervalles inclus dans I, on a :
$$p(X \in J \cup J') = p(X \in J) + p(X \in J').$$

On obtient alors facilement :

PROPRIÉTÉS.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de fonction de densité *f* sur I.
- $\forall a \in I :\ p(X = a) = 0$.
- Pour tous réels $a$ et $b$ de I tels que $a < b$ :

$$p(X \in [a;b]) = p(X \in ]a;b]) = p(X \in [a;b[) = p(X \in ]a;b[) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

***Démonstrations*** : *faciles*

### I.4 Espérance d'une v.a.r. continue

Dans le cas d'une v.a.r. discrète, l'espérance est définie par : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(X = x_i)$.

Dans le cas d'une v.a.r. continue, cette somme n'a pas de sens, car la variable peut prendre une infinité de valeurs. On prolonge alors naturellement cette définition :

DÉFINITION.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité de fonction de densité $f$ sur I.
L'espérance de X est[1] : $E(X) = \int_I x\, f(x)\,dx$.

1 Bien sûr dans le cas où cette intégrale existe. Si par exemple $I = [2;+\infty[$ et que $\lim_{t \to +\infty} \int_2^t x\, f(x)\,dx$ n'existe pas, alors $\int_I x\, f(x)\,dx$ n'a aucun sens et l'espérance n'existe pas.

# II. Les lois uniformes

## II.1 La loi uniforme standard

**PROPRIÉTÉ.**
La fonction constante $f$ définie sur $[0;1]$ par $f(x)=1$ est une densité de probabilité.

***Démonstration*** :

**DÉFINITION.**
On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi uniforme*** sur l'intervalle $[0;1]$ si sa densité est la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=1$. On note X ~ $\mathcal{U}([0;1])$.

*Exemple* : On choisit un nombre au hasard dans $[0;1]$.

**1.** Quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 0,2 et 0,25 ?

**2.** L'expression « compris entre 0,2 et 0,25 » peut être interprétée avec des inégalités strictes.
Cela changera-t-il le résultat obtenu ?

## II.2 Loi uniforme sur [*a* ; *b*]

**PROPRIÉTÉ.**
La fonction constante $f$ définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité.

***Démonstration*** :

**DÉFINITION.**
On dit qu'une variable aléatoire X suit ***la loi uniforme*** sur l'intervalle $[a;b]$ si sa densité est la fonction définie sur $[a;b]$ par $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$. On note X ~ $\mathcal{U}([a;b])$.

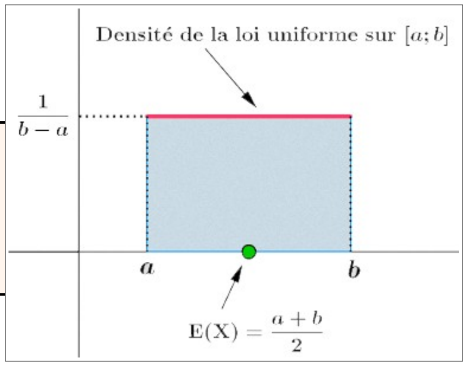
*Exemple* : On choisit un nombre au hasard dans $[0;100[$.

Quelle est la probabilité qu'il soit compris entre 90 et 100 ?

## II.3 Espérance d'une loi uniforme

**PROPRIÉTÉ.**
L'espérance d'une v.a.r. X suivant une loi uniforme sur $[a;b]$ est :

$$E(X)=\frac{a+b}{2}.$$




***Démonstration*** : Il suffit de calculer $\displaystyle\int_a^b x\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x$.