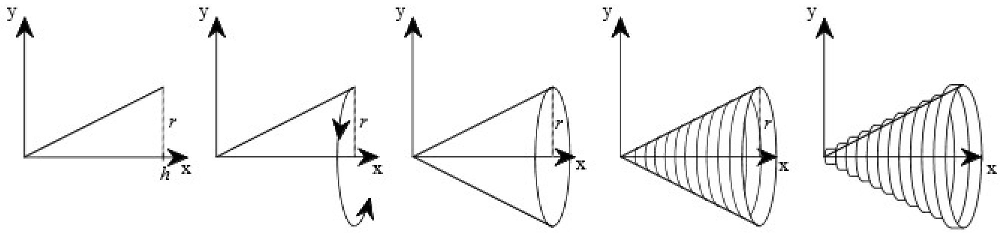
INTÉGRATION

Le calcul de volume : un sujet des mathématiques qui intéresse depuis toujours ?

Il y a des millénaires que les calculs d'aires et de volumes sont au centre des préoccupations quotidiennes. Que ce soit en Mésopotamie, en Égypte ou en Asie, on recense très tôt des traces de techniques de calcul pour déterminer le volume de divers objets de la vie courante. En Mésopotamie, dans une tablette de l'époque paléo-babylonienne (entre 2000 et 1595 av. J.-C.), on trouve l'évaluation du volume d'un canal ; en Égypte, dans le papyrus de Rhind (1650 av. J.-C.), des volumes de silos à grain sont calculés. Au sein d'ouvrages de mathématiques, on rencontre souvent des techniques et instruments développés pour les besoins populaires : ceux des marchands, des agriculteurs, des constructeurs.



Calcul du volume des tonneaux

Le calcul du volume du tonneau intéresse les mathématiciens depuis des siècles : il est déjà abordé par Archimède (287 av. J.-C. - 212 av. J.-C.). Johannes Kepler (1571-1603) publie, en 1615, un traité intitulé *Nova stereometria doliorum vinariorum* (*Nouvelle géométrie des solides pour les tonneaux de vins*). Il y développe une théorie précise pour calculer le volume d'un tonneau en fonction de sa forme. D'après ce qu'il écrit, il aurait élaboré cet ouvrage suite à son second mariage : la méthode de mesure des tonneaux utilisée par son vendeur de vin ne prenait pas en compte les différentes formes de ces tonneaux et, d'après Kepler, elle manquait sérieusement de précision. En tant que mathématicien, il fut révolté et écrivit ce livre deux ans plus tard !
Grâce aux travaux sur le calcul différentiel et intégral réalisés dans les siècles qui suivirent, notamment par Gottfried W. Leibniz (1646-1716), Isaac Newton (1643-1727), Bernard Riemann (1826-1866) et Henri-Léon Lebesgue (1875-1941) nous pouvons aujourd'hui déterminer une formule exacte du volume d'un tonneau selon sa forme !


STEREOMETRIA DO-

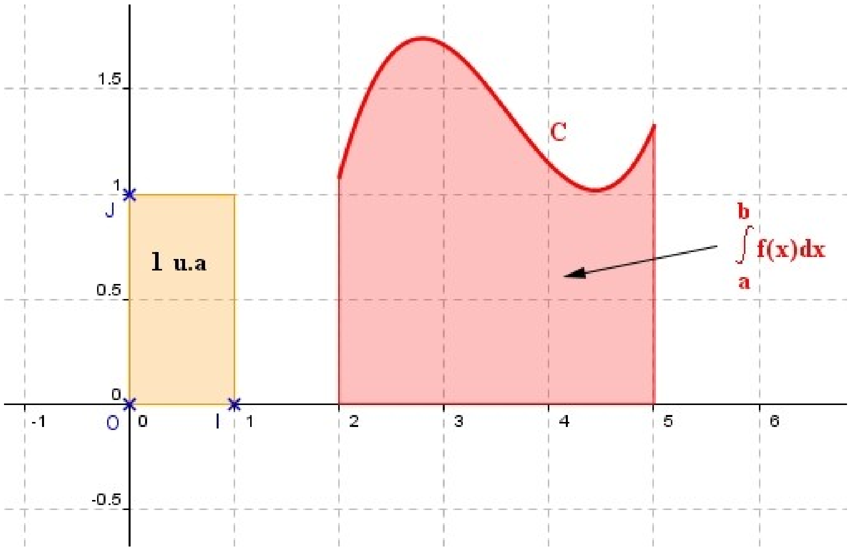
De virga cubicâ ciusq. certitudine.

THEOREMA XXVI.

I. Intégrale d'une fonction continue positive

DÉFINITION.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a \leqslant b$).
On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On appelle ***intégrale de la fonction*** f ***sur l'intervalle*** $[a;b]$, et on note $\int_a^b f(x)\,dx$, le nombre réel représentant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan D délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



Remarques :

- $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)\,dx$ ».
- a et b sont les ***bornes d'intégration***.
- x est la ***variable d'intégration***, elle peut être remplacée par une autre lettre :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(v)\,dv = \text{ etc.}$$

Mais cette notation est indispensable pour définir l'expression de la fonction que l'on intègre, par exemple : $\int_a^b k e^{-x}\,dx$: « dx » indique alors clairement quelle est la variable.

- $\int_a^a f(x)\,dx = \ldots$

Exemples :

- Soit k un réel positif. Alors : $\int_a^b k\,dx = \ldots$

- $\int_0^1 x\,dx =$

II. Intégrale et primitive d'une fonction continue positive

Admise

PROPRIÉTÉ.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $\mathrm{F}(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $\mathrm{F}'=f$.

On dit que F *est une primitive de* f *sur* $[a;b]$.

Admise

PROPRIÉTÉ.

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Exemples :

- une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est …
- une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 4x^3$ est …
- une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x$ est …

PROPRIÉTÉ.

Si F et G sont deux primitives de f, alors il existe un réel k tel que, pour tout x de I :

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+k\,.$$

Démonstration :

Admise

PROPRIÉTÉ. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

Si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=$.

Notation : on note souvent $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[\mathrm{F}(x)]_a^b=$.

Exemples :

- $\int_0^1 3x\,\mathrm{d}x=\ldots$
- $\int_{-1}^1 (-3x+4)\,\mathrm{d}x=\ldots$

III. Intégrale d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Cette fonction admet une primitive F. Notons G une autre primitive de f : $G(x)=F(x)+k$, où $k \in \mathbb{R}$.
Alors : $F(b)-F(a)=(G(b)-k)-(G(a)-k)=G(b)-G(a)$.
Autrement dit, <u>la différence $F(b)-F(a)$ ne dépend pas de la primitive choisie</u>.

Et on a vu que si f est positive sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$, d'où la définition suivante.

DÉFINITION.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
On note F une primitive de f sur I.
Pour tous nombres a et b de I, on définit ***l'intégrale de f sur*** $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a).$$

PROPRIÉTÉS. $\int_a^a f(t)dt = \ldots$ et $\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$

<u>Démonstrations</u> : • $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=F(a)-F(a)=0$

• $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=F(a)-F(b)$ et $-\int_a^b f(t)t\,\mathrm{d}x=-(F(b)-F(a))=-F(b)+F(a)=F(a)-F(b)$

Admise

PROPRIÉTÉ.

Soit *f* une fonction continue sur $[a;b]$.

La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F'=f$.

Autrement dit, F *est une primitive de* f *sur* $[a;b]$ *: c'est la primitive qui s'annule en … .*

IV. Savoir calculer une primitive pour intégrer

Fonction f : $f(x)=\ldots$	Une primitive F. $F(x)=\ldots$	Intervalle
k (où $k \in \mathbb{R}$)		$\mathbb{R}$
x^n (où $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$)		Si $n\geqslant 0$: $\mathbb{R}$ Si $n\leqslant -2$: $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
e^x		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$		$]0;+\infty[$

Rappel : $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$

Exemples :
- Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^3$ est :
- Une primitive de la fonction g définie sur $]-\infty;0[$ par $g(x)=\frac{1}{x^2}$ est :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f	Une primitive F	Conditions
$\frac{u'}{u^2}$		u ne s'annule pas sur I
$u'\mathrm{e}^u$		

Exemples :
- Une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3}{(3x+2)^2}$ est :
- Une primitive de la fonction g définie par $g(x)=2x\mathrm{e}^{x^2+3}$ est :
-
-
-
-

V. Propriétés des intégrales

V.1 Linéarité

PROPRIÉTÉS*. Linéarité de l'intégrale

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I.
Pour tous nombres réels a et b de I :

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t= \qquad\qquad \text{et} \quad \int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t= \qquad\qquad .$$

V.2 Relation de Chasles

PROPRIÉTÉ*. Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

Pour tous nombres réels a, b et c de I : $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t= \qquad\qquad .$

* *Démonstrations* : utiliser la propriété-définition $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ …

V.3 Inégalités

PROPRIÉTÉS. Positivité et relation d'ordre

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle $\mathrm{I}=[a;b]$.

- Si pour tout x de I, $f(x)\geqslant 0$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.
- Si pour tout x de I, $f(x)\leqslant g(x)$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ldots \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstrations :

- f est positive, donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une aire sous une courbe…
- On pose $h(x)=g(x)-f(x)$. On a donc $h(x)\geqslant 0$.

Et donc : $\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$. C'est-à-dire : $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant 0$.

D'où : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

V.4 Valeur moyenne

DÉFINITION.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.

La ***valeur moyenne de la fonction f*** sur $[a;b]$ est le réel

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si f est une fonction continue et positive sur $[a;b]$, de courbe représentative C, alors la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est le réel k tel que le rectangle de dimensions $b-a$ et k soit de même aire que la partie du plan délimitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Valeur moyenne notée I :

$$\mathrm{I}=\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}.$$

Donc $\mathrm{I}(b-a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.