FONCTIONS EXPONENTIELLES
EXERCICES DE BAC ES

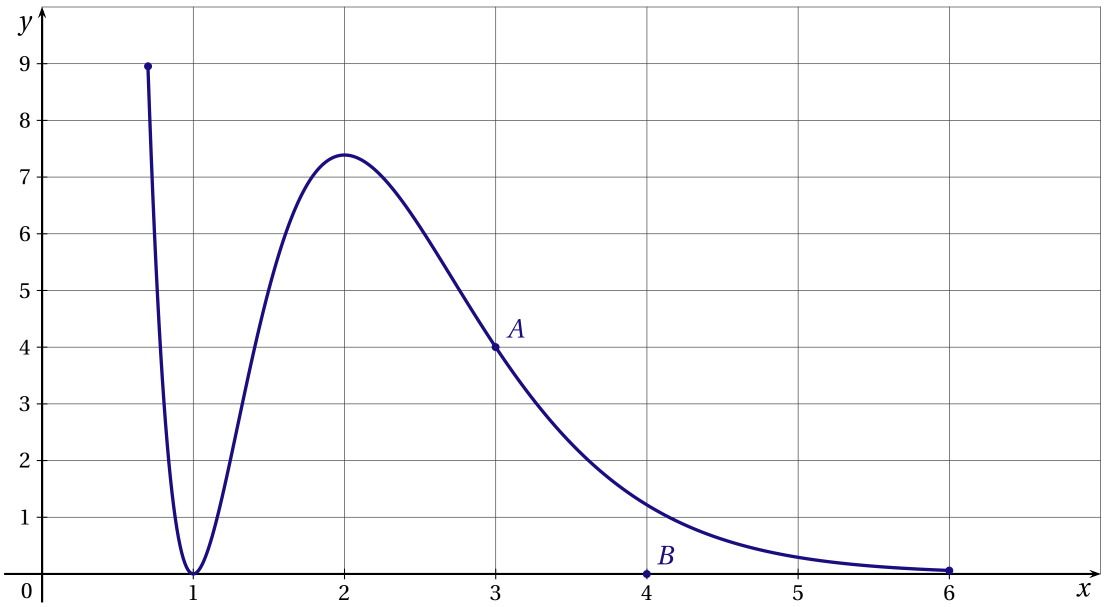
EXERCICE 1

Amérique du Nord 2017 (4)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0,7;6]$; on suppose que f est dérivable.

PARTIE A : Étude graphique

On a représenté la fonction f sur le graphique ci-dessous.



1. La tangente au point d'abscisse 3 à la courbe représentative de f passe par les points $A(3;4)$ et $B(4;0)$. Déterminer $f'(3)$.
2. D'après le graphique ci-dessus, donner le tableau de signe de f' sur l'intervalle $[0,7;6]$.

PARTIE B : Étude théorique

On admet que la fonction f est définie par $f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$.

1. Montrer que $f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,7;6]$ et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,7;6]$.
   On ne demande pas de calculer les ordonnées.
3. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés.

L1	$f'(x) := (-2x\hat{}2 + 6x - 4) * \mathrm{e}\hat{}(-2x+6)$ $\rightarrow f'(x) = \left(-2x^2 + 6x - 4\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	$g(x) :=$ Dérivée$[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) = -16x\mathrm{e}^{-2x+6} + 4x^2\mathrm{e}^{-2x+6} + 14\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	Factoriser$[g(x)]$ $\rightarrow 2\mathrm{e}^{-2x+6}\left(2x^2 - 8x + 7\right)$
L4	Résoudre$[g(x) = 0]$ $\rightarrow \left\{x = \frac{-\sqrt{2}+4}{2} ; x = \frac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L5	$F(x) :=$ Primitive$[f(x)]$ $\rightarrow F(x) = \left(\frac{1}{4}-2x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$

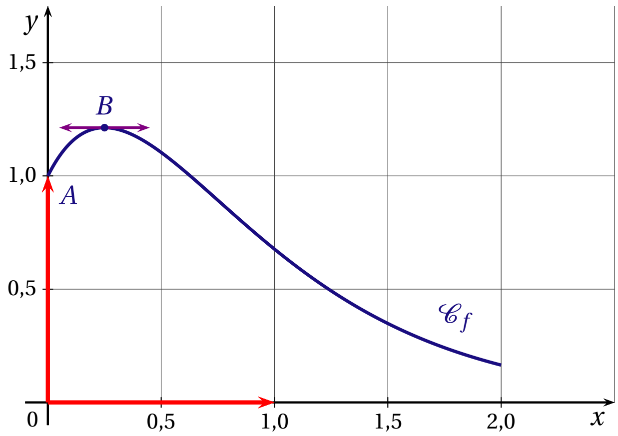
   a) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est concave.
   b) La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Si oui, en donner l'abscisse.

EXERCICE 2 *Amérique du Sud 2017 (4)*

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0;2]$.
On suppose que f est deux fois dérivable et on note f' la fonction dérivée de f.
On sait que :

— le point $A(0;1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$;

— la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0,25 est parallèle à l'axe des abscisses.



Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

PARTIE A

On suppose que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

1. En utilisant le graphique et les données de l'énoncé, déterminer $f(0)$ et $f'(0{,}25)$.
2. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. Déduire des deux questions précédentes les valeurs des réels a et b.

PARTIE B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0;2]$ par $f(x) = (4x+1)\mathrm{e}^{-2x}$.
On admet par ailleurs que $f'(x) = (2-8x)\mathrm{e}^{-2x}$ et $f''(x) = (16x-12)\mathrm{e}^{-2x}$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $[0;2]$.

1. Étudier le signe de f' sur $[0;2]$ puis en déduire les variations de f sur $[0;2]$.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet, sur l'intervalle $[0;2]$, un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

EXERCICE 3 *Antilles Guyane septembre 2017 (4)*

PARTIE A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1;25]$ par $f(x) = 10 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x+1}}{x}$.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

$f(x) : 10 - \mathrm{e}\hat{}(0.2x+1)/x$
$x \rightarrow 10 - \dfrac{\exp(0.2x+1)}{x}$
factoriser(deriver($f(x)$))
$\dfrac{\exp(0.2x+1)*(1-0.2x)}{x^2}$
factoriser (deriver(deriver($f(x)$)))
$\dfrac{\exp(0.2x+1)*(-x^2+10x-50)}{25x^3}$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1;25]$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1;25]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$.
   a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1;5]$.
   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5;25]$.
   c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α.
   d) En utilisant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, justifier que la fonction f est concave sur l'intervalle $[1;25]$.

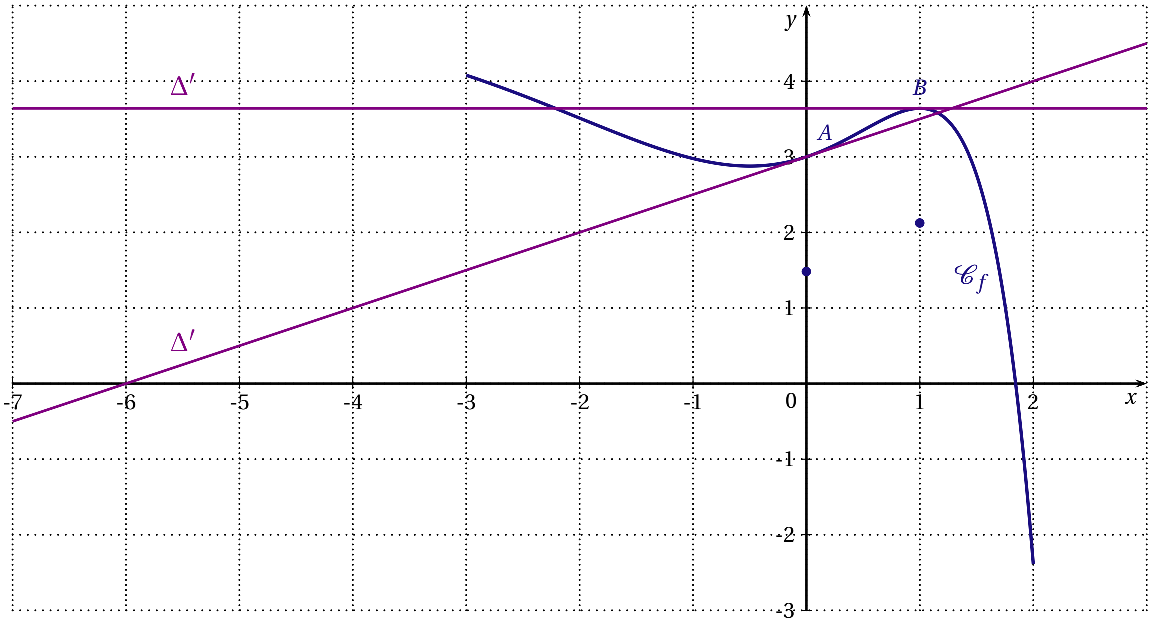
PARTIE B

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail. On s'intéresse au bénéfice réalisé, en millier d'euros, correspondant à la production d'une quantité de x dizaines de tonnes d'aliments.
On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la fonction f étudiée dans la partie A ci-dessus.
La production minimale est de 10 tonnes, ainsi $x \geqslant 1$.
Les réponses aux questions suivantes seront justifiées grâce à la partie A.

1. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société ?
   Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?
2. Déterminer, à la tonne près, la quantité maximale d'aliments qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice.

EXERCICE 4 **PARTIE A** *Asie 2017 (3)*

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;2]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point A de coordonnées $(0;3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
B est le point d'abscisse 1 appartenant à la courbe $\mathscr{C}_f$.



On dispose des informations suivantes :

— la fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $[-3;-0,5]$ et $[1;2]$ et elle est strictement croissante sur $[-0,5;1]$;

— la droite Δ d'équation $y = 0,5x + 3$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A ;

— la tangente Δ' à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

Chaque réponse devra être justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(1)$.
2. Quel est le signe de $f'(-2)$?
3. Donner la valeur de $f'(0)$.
4. Le point A est-il un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$?

PARTIE B

On admet qu'il existe trois réels a, b et c pour lesquels la fonction f représentée dans la partie A est définie, pour tout réel x de $[-3;2]$, par :

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x + 5.$$

1. En utilisant l'un des points du graphique, justifier que $c = -2$.
2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3;2]$, par :

$$f'(x) = \left(ax^2 + (2a + b)x - 2 + b\right)\mathrm{e}^x.$$

   En utilisant les résultats de la partie A, justifier que $b = 2,5$ puis que $a = -1$.

PARTIE C

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de $[-3;2]$ par $f(x) = \left(-x^2 + 2,5x - 2\right)\mathrm{e}^x + 5$.

1. Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $[-3;2]$, $f'(x) = \left(-x^2 + 0,5x + 0,5\right)\mathrm{e}^x$.
2. Étudier le signe de f' puis dresser le tableau de variation de f sur $[-3;2]$.
3. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1;2]$.

   b) Donner la valeur de α arrondie au centième.

EXERCICE 5 **PARTIE A** *France Métropolitaine (repassé) 2017 (4)*

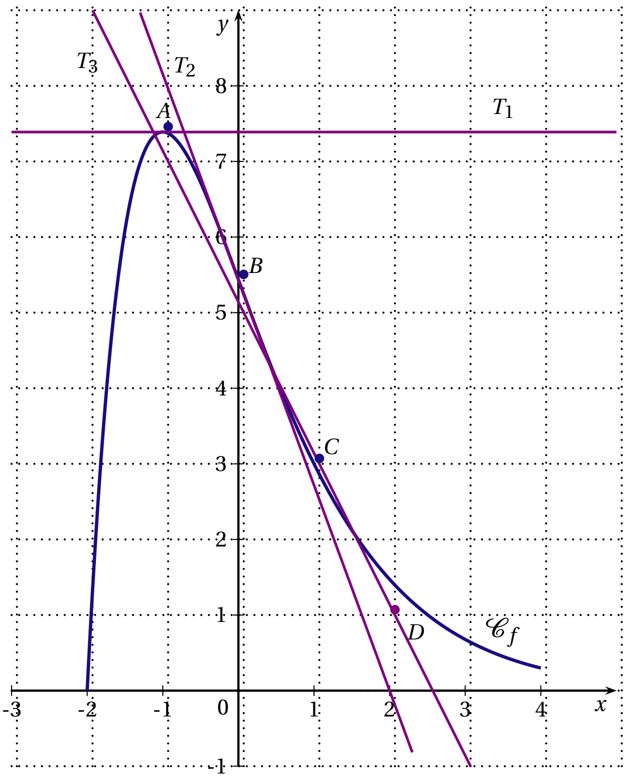
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;4]$ ainsi que plusieurs tangentes à $\mathscr{C}_f$:

— T_1 est la tangente au point A de coordonnées $\left(-1;\mathrm{e}^2\right)$,

— T_2 est la tangente au point B de coordonnées $(0;2\mathrm{e})$,

— T_3 est la tangente au point C de coordonnées $(1;3)$.

On sait que la tangente T_1 est parallèle à l'axe des abscisses et que la tangente T_3 passe par le point D de coordonnées $(2;1)$.



1. Déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
2. On admet que B est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$. Quelle interprétation graphique peut-on faire ?
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C.

PARTIE B

On admet que la fonction f de la partie A est définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2;4]$, par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2;4]$, on a $f'(x) = -(x+1)\mathrm{e}^{-x+1}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2;4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

PARTIE C

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver $\left[-(x+1)*\exp(-x+1)\right]$
	$x*\exp(-x+1)$
2	intégrer $\left((x+2)*\exp(-x+1)\right)$
	$-(x+3)*\exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante.

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. justifier.