EXERCICE 1

1. Calculer

$A=8^{\frac{1}{3}}$; $B=4^{\frac{3}{4}}$; $C=27^{\frac{4}{3}}$; $D=\dfrac{0{,}25^{0{,}7}\times 0{,}25^{1{,}2}}{0{,}25^{1{,}4}}$; $E=\dfrac{\left(0{,}2^{\frac{2}{3}}\right)^{6}\times 0{,}2^{-1{,}6}}{0{,}2^{3{,}4}}$.

2. Simplifier les expressions suivantes :

$F(x)=(1+4^x)^2-(1-4^x)^2$; $G(x)=\dfrac{2^{2x-3}\times 0{,}5^{x+2}}{2^{-3x-1}}$; $H(x)=\dfrac{\left(5^{x+1}-0{,}2^{-x}\right)^2}{2^4}$; $I(x)=\dfrac{4^{x+0{,}5}+(2^x)^2}{6^{1-x}}$.

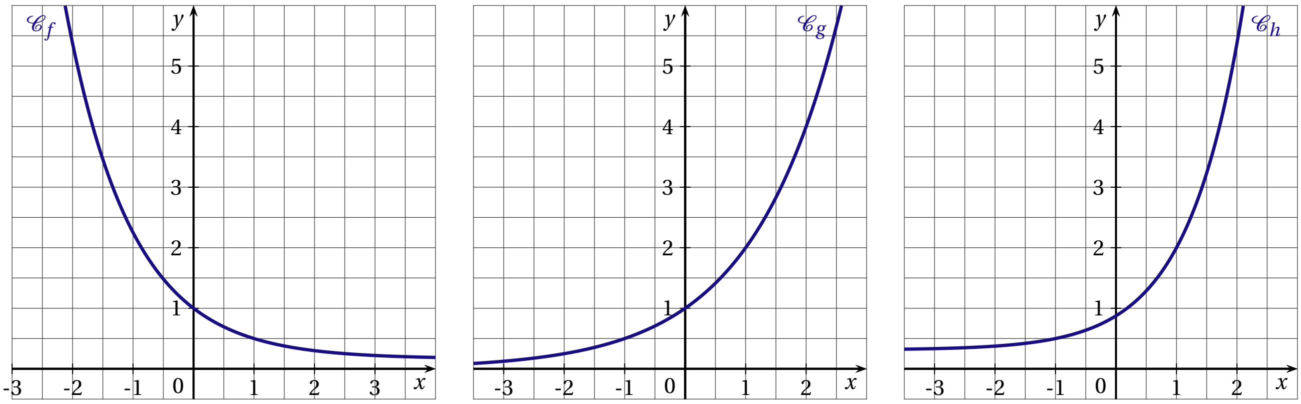
EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4^x-0{,}25^x$.

1. Calculer $f(-0{,}5)$, $f(0{,}5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$ et $f(2)$.
   Quelle conjecture peut-on faire ?
2. Montrer que pour tout réel x, $f(-x)=-f(x)$

EXERCICE 3

On a tracé ci-dessous, les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$.



1. Une seule de ces trois fonctions est une fonction exponentielle de base q. Laquelle est-ce ?
2. Quelle est la valeur du réel q ?

EXERCICE 4

1. En raison de l'évaporation, un bassin contenant 95 m^3 d'eau perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.
   Modéliser l'évolution du volume d'eau contenue dans le bassin à l'aide d'une fonction f de la forme

$$f(x)=k\times q^x$$

   Préciser les valeurs de k et de q, et donner le sens de variation de la fonction f.
2. En trois mois, le cours d'une action a augmenté de 12%.
   Calculer le taux d'évolution mensuel moyen du cours de cette action pendant les trois mois. (Donner le résultat arrondi à 0,01 % près)
3. Le 4 janvier 2010, le cours du lingotin d'or de 500 g était de 12 400 €, contre 20 150 € le 4 août 2016.
   Calculer le pourcentage annuel moyen d'évolution du cours du lingotin d'or entre ces deux dates.

EXERCICE 5

Simplifier les écritures suivantes :

$A=(\mathrm{e}^x)^2-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-2x}}$; $B=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2$; $C=\mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)$; $D=\dfrac{\mathrm{e}^{2x+1}}{\mathrm{e}^{1-x}}$; $E=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2}{\mathrm{e}^{2x-1}}$.

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x^2+x-1}=1$
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+5}}{\mathrm{e}^{3-2x}}=\mathrm{e}^{2x^2-1}$
3. $2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x-1=0$
4. $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\geqslant \mathrm{e}$
5. $\mathrm{e}^{2x}\leqslant \mathrm{e}^x$
6. $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{x^2}<1$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-x$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f, en déduire que f admet un minimum.
3. Justifier que pour tout réel x on a : $\mathrm{e}^x>x$.

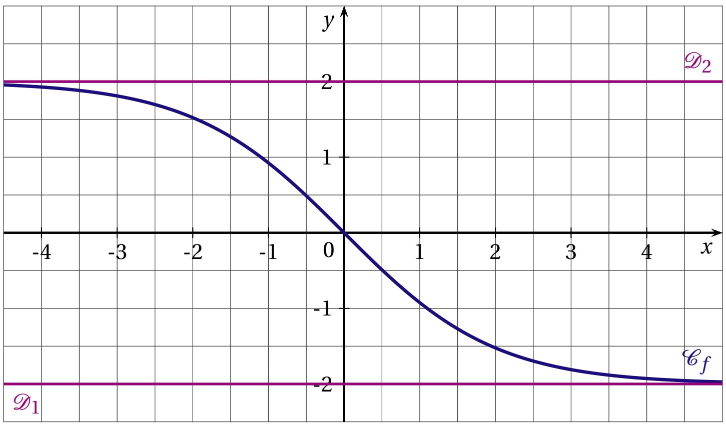
EXERCICE 8

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f

1. f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{x}$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^x$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$

EXERCICE 9

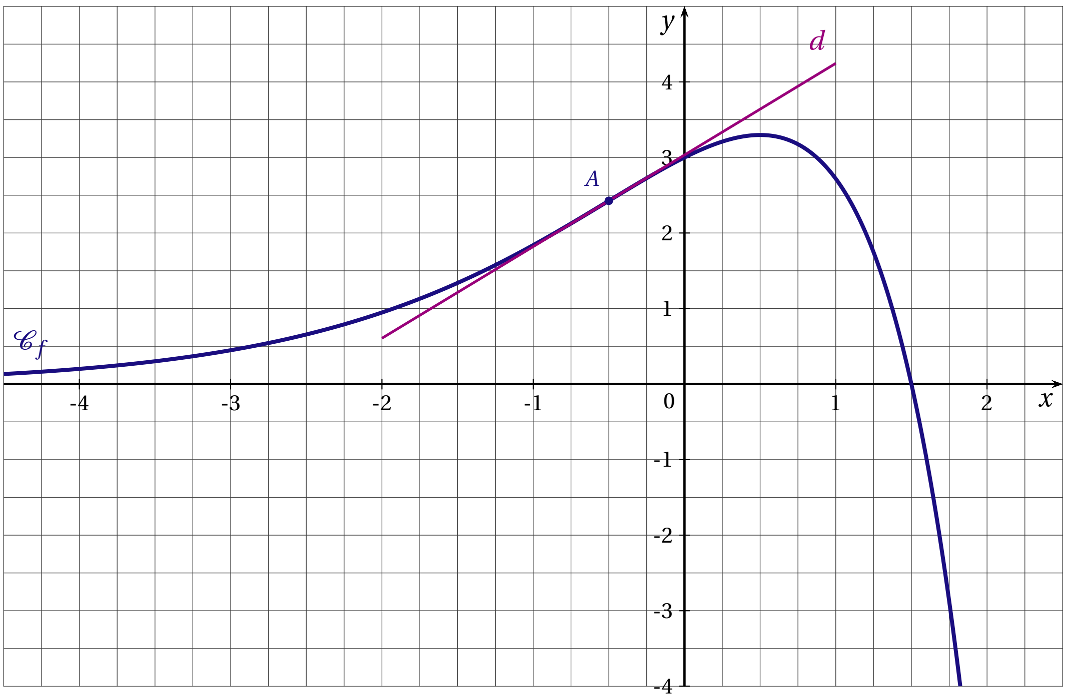
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{4}{1+\mathrm{e}^x}-2$.
On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction f et les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $y=-2$ et $y=2$



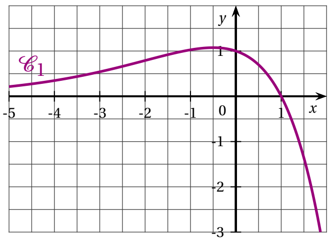
1. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Étudier la convexité de la fonction f.
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?

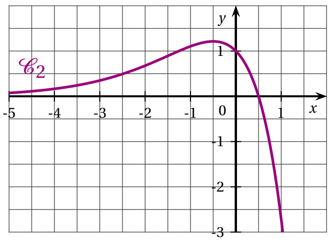
EXERCICE 10

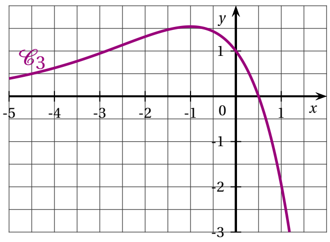
On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La droite d est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $\left(-\frac{1}{2}\right)$.



1. Parmi les trois courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la dérivée de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.



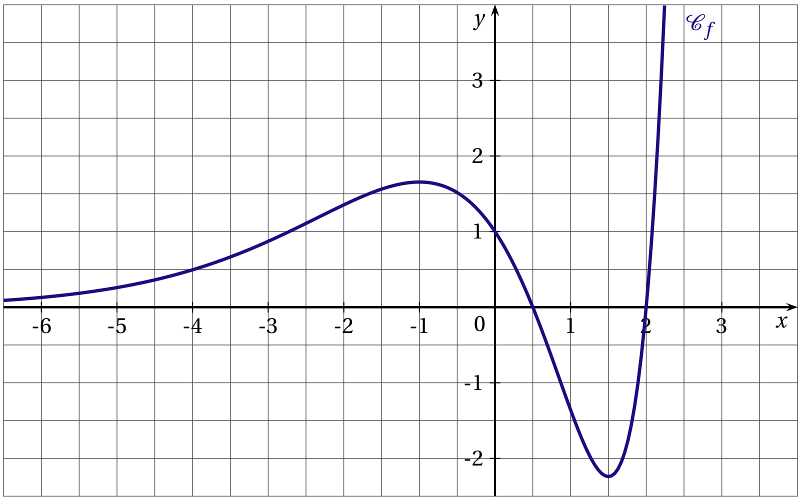




2. La fonction f est définie pour tout réel x, par $f(x) = (3-2x)\mathrm{e}^x$.
   a) On note f' la dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)\mathrm{e}^x$. Sa courbe représentative notée $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   c) Dresser le tableau de variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   Tracer la droite T sur le graphique précédent.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 40$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2;3]$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de α.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \dfrac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f.
   a) Calculer $f'(x)$.
   b) Donner le tableau de variations de f.
   c) En déduire que pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \geqslant 2$.
2. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
   a) Montrer que pour tout réel x, $f''(x) = f(x)$.
   b) Étudier la convexité de la fonction f.

EXERCICE 13

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1}$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\dfrac{x}{2} - 1\right) e^{-0,5x}$

EXERCICE 14

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{3-2x}{e^x}$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f.

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f'(x) = (2x-5) \times \mathrm{e}^{-x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;0]$.
   Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de α.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
4. a) Étudier la convexité de la fonction f.
   b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées.

EXERCICE 15 (*D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2010*)

1. Dans cette question aucune justification n'est demandée, tous les tracés demandés seront effectués sur le repère orthonormal fourni en annexe qui sera rendu avec la copie.
   On souhaite tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f satisfaisant les conditions suivantes :

— La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.

— Le maximum de la fonction f est 5, il est atteint pour $x = 0$.

— Le minimum de la fonction f est 1.

— La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
On note f' la fonction dérivée de f et on sait que $f'(0) = -3$, $f(6) = 3$ et $f'(6) = 2$.

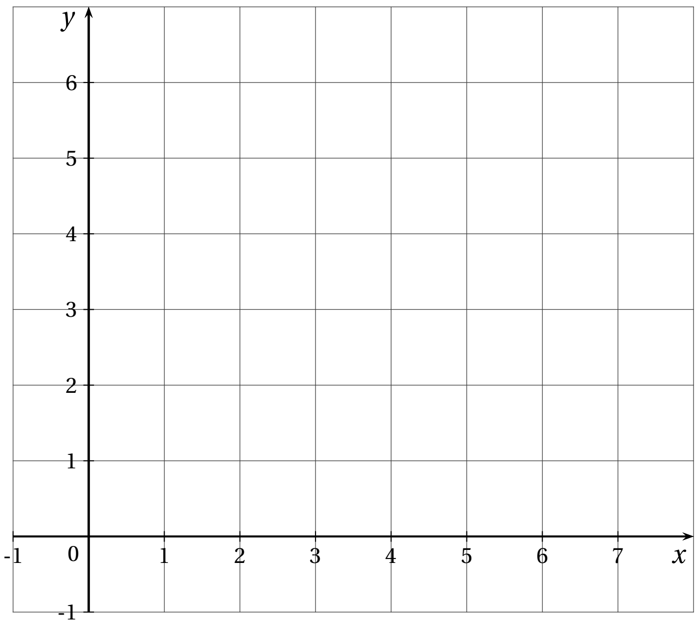
— Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		6
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

a) Donner le tableau de variations de la fonction f. On fera figurer dans le tableau les images par f de 0, de 4 et de 6.

b) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 6.

c) Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.
On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.



2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.
   On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par $g(x) = \mathrm{e}^{f(x)}$.
   a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
      Donner le tableau de variation de la fonction g. On précisera les valeurs de $g(0)$, $g(4)$ et $g(6)$.
   b) Déterminer $g'(0)$.

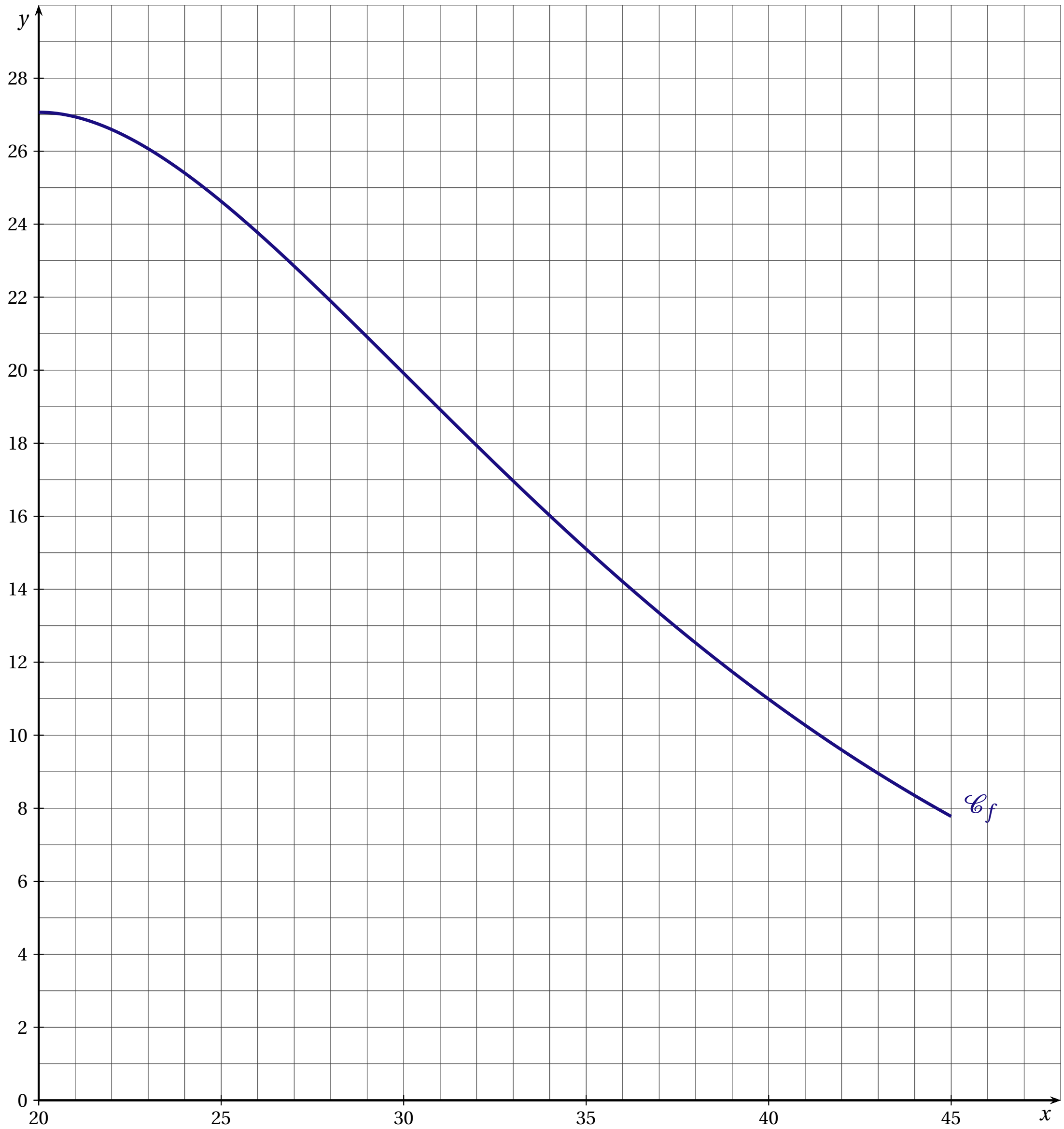
EXERCICE 16

PARTIE A

Une entreprise fabrique un nouvel article. Le coût moyen de fabrication de chaque article est de 15 euros.
L'entreprise envisage de vendre chaque article entre 20 euros et 45 euros.
Avant la commercialisation l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée en fonction du prix de vente.
L'étude a permis d'établir que, si chaque article est vendu au prix de x euros, la quantité d'articles demandés $f(x)$, en milliers d'unités, s'exprime par :

$$f(x) = (20x - 200)\mathrm{e}^{-0,1x}.$$

La fonction de demande f est définie sur l'intervalle $[20;45]$. La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Si l'entreprise propose un prix de vente de 40 euros :
   a) calculer le nombre d'articles demandés arrondi à la centaine d'articles près.
   b) Estimer alors le bénéfice réalisé.
2. a) On note f' la dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[20;45]$, $f'(x) = (40-2x)\mathrm{e}^{-0,1x}$.
   b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[20;45]$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 11$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[20;45]$.
   b) En déduire l'intervalle dans lequel doit se situer le prix de vente d'un article pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 11 000 unités.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

1	*Dériver* $[(40-2x)\cdot\exp(-0.1x)]$
	$\left(\frac{x}{5}-6\right)\cdot\exp(-0.1x)$

   Utiliser ce résultat pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

PARTIE B

On appelle fonction d'offre la fonction g, définie sur l'intervalle $[20;45]$, par : $g(x) = x - 18$.
Le nombre $g(x)$ est le nombre de milliers d'articles que l'entreprise est prête à produire pour un prix de vente unitaire de x euros.

1. Tracer sur le graphique précédent la représentation graphique de la fonction g.
2. On appelle prix d'équilibre le prix unitaire x d'un article pour lequel l'offre est égale à la demande.
   a) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
   b) En déduire une valeur approchée au millier près, du nombre d'articles que l'entreprise peut espérer vendre au prix d'équilibre.
   c) Estimer alors le bénéfice réalisé.

EXERCICE 17

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-0,5x^2}$

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
   b) On considère l'algorithme suivant :

$a \leftarrow 0$
$b \leftarrow 1$
Tant que $b - a > 10^{-3}$
    $m \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(a) \times f(m) < 0$ alors
        $b \leftarrow m$
    Sinon
        $a \leftarrow m$
    Fin si
Fin Tant que

   À la fin de l'exécution de l'algorithme les valeurs des variables a et b sont $a \approx 0,7529$ et $b \approx 0,7539$.
   Que signifie ce résultat ?

4. Étudier la convexité de la fonction f.
5. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE 18 (*D'après sujet bac Antilles Guyane septembre 2017*)

PARTIE A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1;25]$ par $f(x)=10-\dfrac{\mathrm{e}^{0,2x+1}}{x}$.
Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

$f(x):10-\mathrm{e}\hat{}(0.2x+1)/x$
$x\rightarrow 10-\dfrac{\exp(0.2x+1)}{x}$
factoriser(deriver($f(x)$))
$\dfrac{\exp(0.2x+1)*(1-0.2x)}{x^2}$
factoriser (deriver(deriver($f(x)$)))
$\dfrac{\exp(0.2x+1)*(-x^2+10x-50)}{25x^3}$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1;25]$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1;25]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x)=0$.
   a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1;5]$.
   b) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5;25]$.
   c) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α.
   d) En utilisant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, justifier que la fonction f est concave sur l'intervalle $[1;25]$.

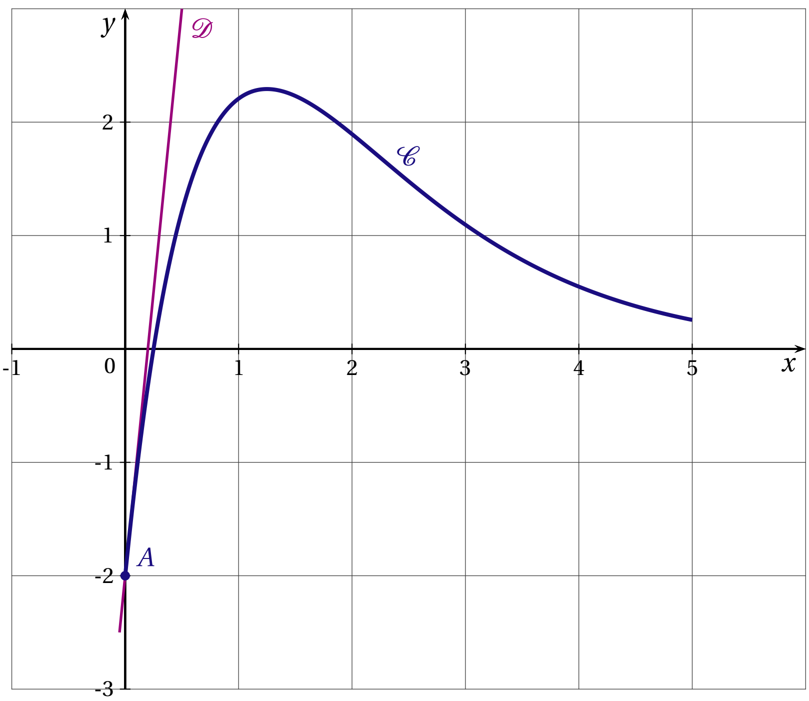
PARTIE B

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail. On s'intéresse au bénéfice réalisé, en millier d'euros, correspondant à la production d'une quantité de x dizaines de tonnes d'aliments.
On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la fonction f étudiée dans la partie A ci-dessus.
La production minimale est de 10 tonnes, ainsi $x\geqslant 1$.
Les réponses aux questions suivantes seront justifiées grâce à la partie A.

1. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société ?
   Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?
2. Déterminer, à la tonne près, la quantité maximale d'aliments qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice.

EXERCICE 19 (*D'après sujet bac Polynésie 2017*)

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x)=(ax-2)\mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel.
On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;5]$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0;-2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x - 2$.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0;5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax + a + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

   b) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.
   c) Donner l'expression de $f'(x)$.
3. a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$. On pourra faire un tableau.
   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
   c) Résoudre sur l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8*x+10)*\exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x+10)\,\mathrm{e}^{-x}$
2	Dériver $\left[g(x),x\right]$ $\rightarrow (8*x-18)*\exp(-x)$
3	Résoudre $\left[(8*x-18)*\exp(-x) > 0,x\right]$ $\rightarrow x > 9/4$

   En utilisant ces résultats :

   a) Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.
   b) Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.
5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0;5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x-2)\mathrm{e}^{-x}$$

a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

EXERCICE 20 (*D'après sujet bac Pondichéry 2016*)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE (Bio Bois Énergie)* fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.
L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

— Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

— Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$R(x) = 3x$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

— On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

PARTIE A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe, on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.

Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

   b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

PARTIE B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1;15]$ par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1;15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$.

   b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1;15]$.
2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.

b) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;15]$.
   Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

c) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1;15]$.

PARTIE C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a :

$$D(x) = -0{,}3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1;15]$ et on note D' sa fonction dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1;15]$.
4. a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

   b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.