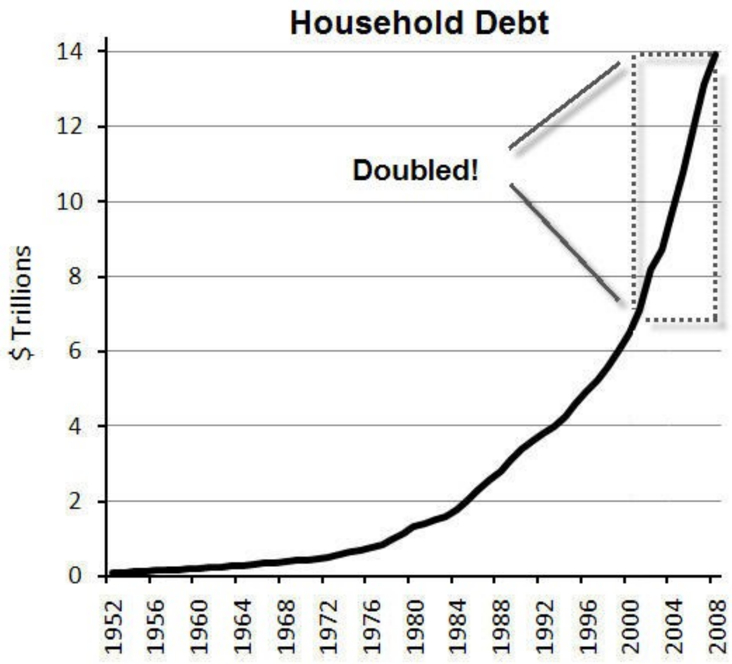
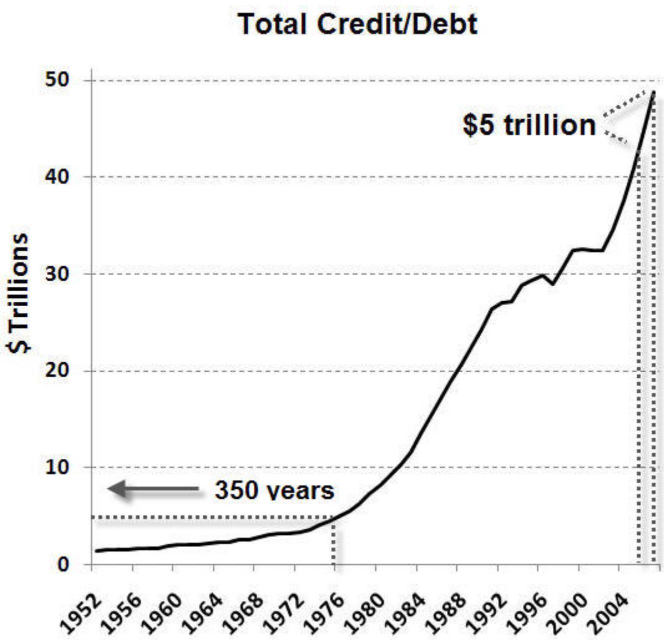
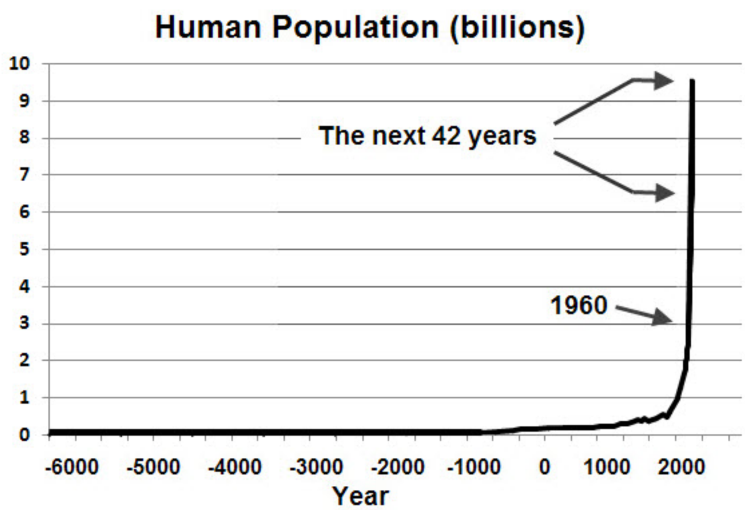
FONCTIONS EXPONENTIELLES







I. Définition

DÉFINITION. Soit q un réel strictement positif.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=q^x$ s'appelle la ***fonction exponentielle de base q***.

PROPRIÉTÉ. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME. **Relation fonctionnelle**

La fonction exponentielle de base q transforme les sommes en produits.
Pour tous réels x et y : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.
Autrement dit : $q^{x+y}=q^x\times q^y$.

CONSÉQUENCES. Pour tous réels x et y :

- $q^x>0$
- $q^{-x}=$
- $q^{x-y}=$
- pour tout entier relatif m : $(q^x)^m=$

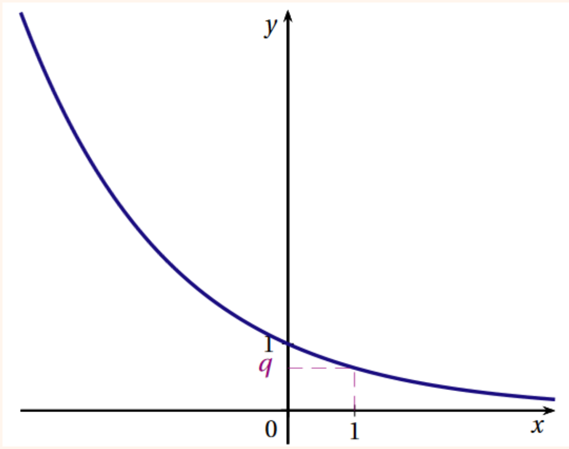
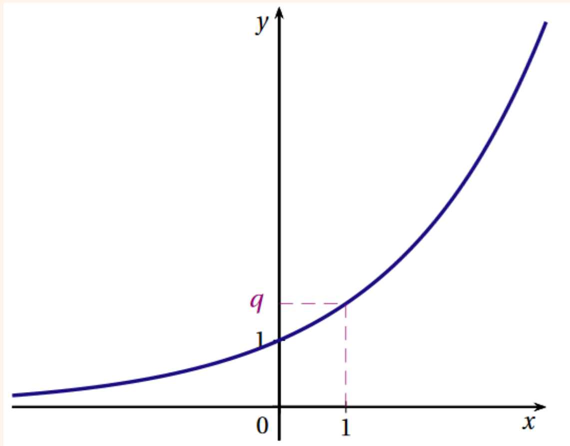
Démonstrations :

Exemple : une entreprise s'est fixé comme objectif de réduire de 30 % ses émissions de gaz à effet de serre d'ici quinze ans.
Déterminer le pourcentage d'évolution annuel moyen des émissions de gaz à effet de serre.

II. Sens de variation et convexité

En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q>0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

PROPRIÉTÉ.

$0<q<1$	$q>1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} q^x=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=+\infty$
	

PROPRIÉTÉ. La fonction exponentielle de base q est convexe sur $\mathbb{R}$.

III. Fonction exponentielle de base e

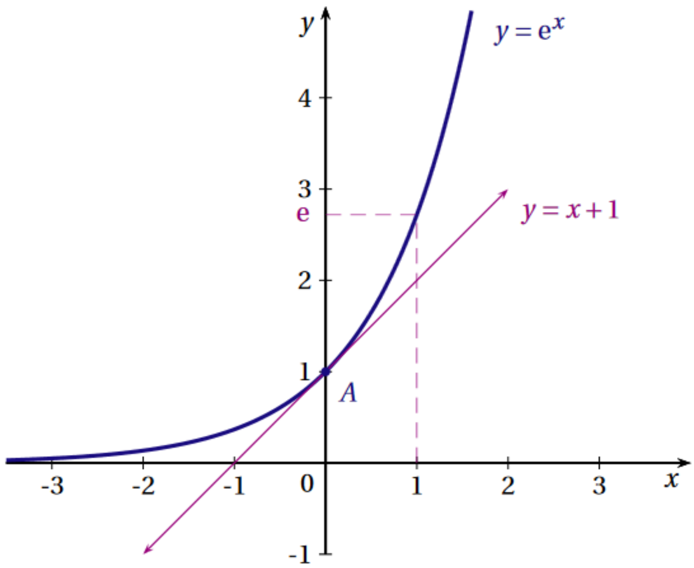
PROPRIÉTÉ-DÉFINITION.

Parmi toutes les fonctions exponentielles de base q, il existe une unique fonction dont le nombre dérivé en 0 est égal à 1.

Cette valeur particulière du réel q est notée e.

Le nombre e est un nombre réel irrationnel, une valeur approchée est : $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$.

On appelle ***la fonction exponentielle*** la fonction exponentielle de base e, et on la note exp.



BILAN SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE

- exp est définie sur ℝ par $\exp(x)=\mathrm{e}^x$
- exp est dérivable sur ℝ et son nombre dérivé en 0 est 1
- exp est strictement positive sur ℝ : pour tout réel *x*, $\mathrm{e}^x>0$
- pour tous réels *x* et *y*, et pour tout entier relatif *m* :

$\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^y=$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{e}^{-x}=$

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}=$ $\qquad\qquad$ $(\mathrm{e}^x)^m=$

- exp est convexe sur ℝ
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=$
- $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^y \Leftrightarrow x=y$ et $\mathrm{e}^x<\mathrm{e}^y \Leftrightarrow x<y$

PROPRIÉTÉ.
La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ et : $\exp'=$

Démonstration :

CONSÉQUENCE.
La fonction exponentielle est convexe sur ℝ.

Démonstration :

IV. Composée d'une fonction et de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ.
Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction :

Autrement dit : $(e^u)' =$

Exemple 1 :
1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x) = e^{-3x^2+4}$.
2. En déduire les variations de f.

Exemple 2 :
1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x) = -3e^{-2x}$.
2. En déduire les variations de f.