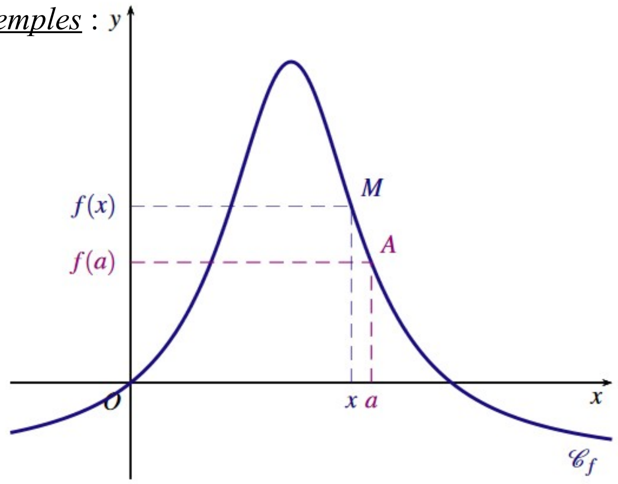
CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE ET CONVEXITÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

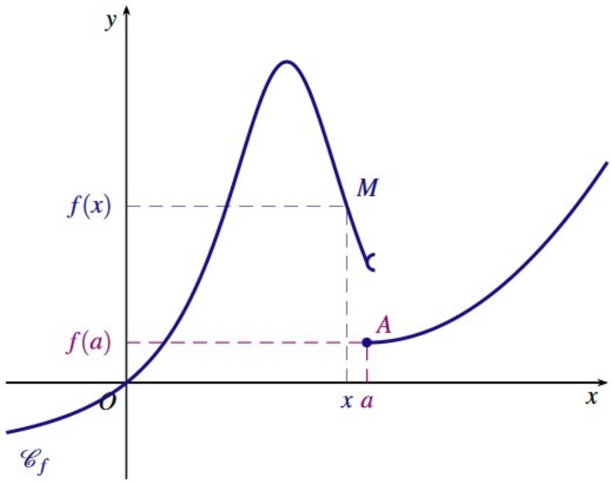
I. Définition et exemples

DÉFINITION INTUITIVE.
On dit que f est continue sur I si sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

Exemples :



La fonction f est continue.
Pour tout réel a de I, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a.



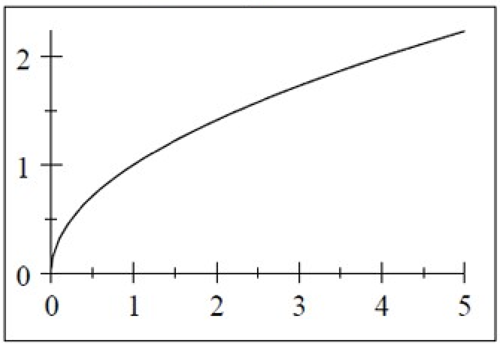
La fonction f n'est pas continue en a.
La courbe $\mathscr{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a.
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a.

(source : http://yallouz.arie.free.fr)

PROPRIÉTÉ. Si f est dérivable sur l'intervalle I, alors elle est continue sur I. *Admis*

Attention, la réciproque est fausse.
Par exemple, la fonction racine carrée est définie et continue sur son ensemble de définition $[0;+\infty[$ mais cette fonction n'est pas dérivable en 0.

$x \mapsto \sqrt{x}$



Admis

PROPRIÉTÉS.
Les fonctions polynomiales, rationnelles et racine carrée sont continues sur leur ensemble de définition, et les fonctions construites algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de ces fonctions sont continues sur leur ensemble de définition.

Convention dans un tableau de variations

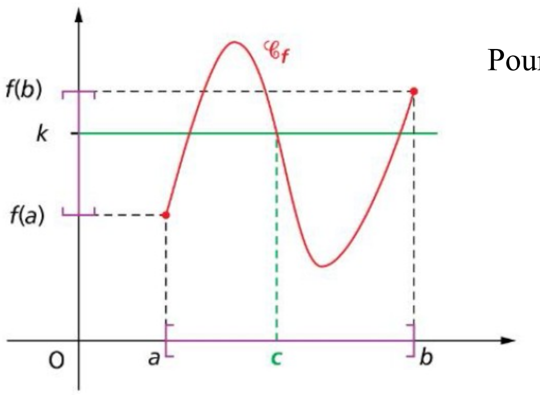
Une flèche dans un tableau de variations d'une fonction f indique :
- la stricte croissance ou la stricte décroissance de f sur l'intervalle correspondant ;
- la continuité de la fonction f sur cet intervalle.

II. Théorème des valeurs intermédiaires

Admis

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES. (**TVI**)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I. Soient a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:
l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.



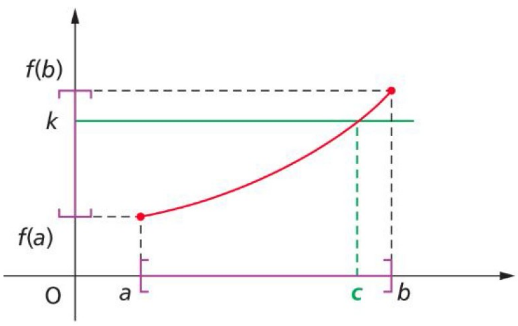
Pourquoi est-il nécessaire que f soit continue sur l'intervalle I ?

THÉORÈME. (COROLLAIRE DU TVI)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, strictement monotone sur I.

Soient a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$:

l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a;b]$



Démonstration :

L'existence d'une solution à l'équation $f(x)=k$ est assurée par le TVI.

Démontrons par l'absurde l'unicité de cette solution.

Supposons qu'il existe deux réels distincts α et α' de l'intervalle [a ; b] solutions de l'équation $f(x)=k$.

Si α est le plus petit des deux réels, alors $\alpha<\alpha'$.

Or, f est strictement monotone sur I donc $f(\alpha)<f(\alpha')$ ou $f(\alpha)>f(\alpha')$.

Ceci est absurde puisque $f(\alpha)=f(\alpha')=k$.

Remarque importante : ces théorèmes s'appliquent aussi lorsque l'intervalle I est de la forme $[a;b[$; $]a;b]$; $]a;b[$; $[a;+\infty[$; $]-\infty;b]$ ou $]-\infty;b[$.

Exemple :

On considère la fonction g définie sur ℝ par $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$.

1. Étudier les variations de g .

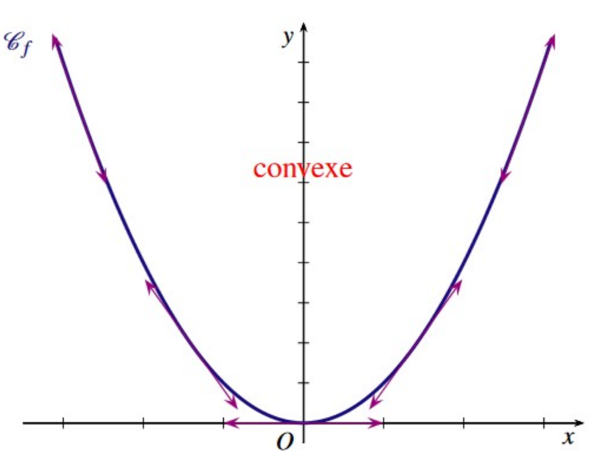
2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution notée α.
Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

3. Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

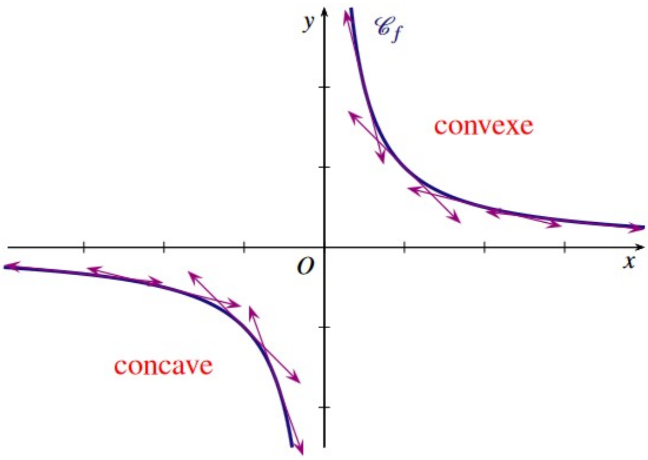
III. Convexité et concavité

DÉFINITIONS.
• On dit que f est ***convexe*** sur I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
• On dit que f est ***concave*** sur I si sa courbe représentative est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Exemples : (source : http://yallouz.arie.free.fr)



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.

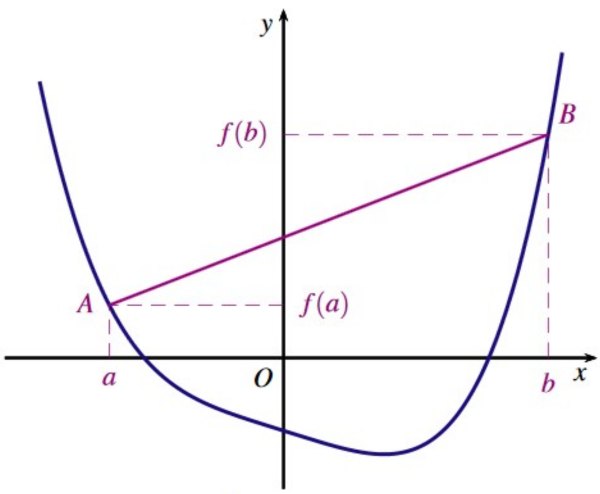


La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

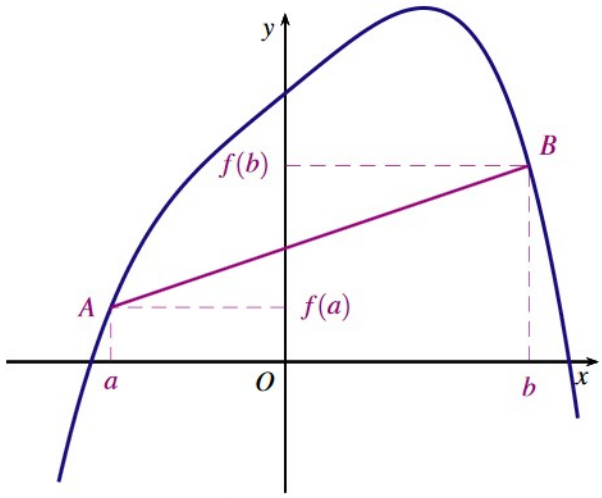
Admises

PROPRIÉTÉS. Si, pour tous les points A et B de la courbe représentative de f :
• le segment [AB] est au-dessus de la courbe alors f est convexe.
• le segment [AB] est au-dessous de la courbe alors f est concave.

Exemples : (source : http://yallouz.arie.free.fr)



f est convexe



f est concave

Admis

THÉORÈMES.
• f est convexe si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I.
• f est concave si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

Par conséquence, si la fonction f' est dérivable sur I :

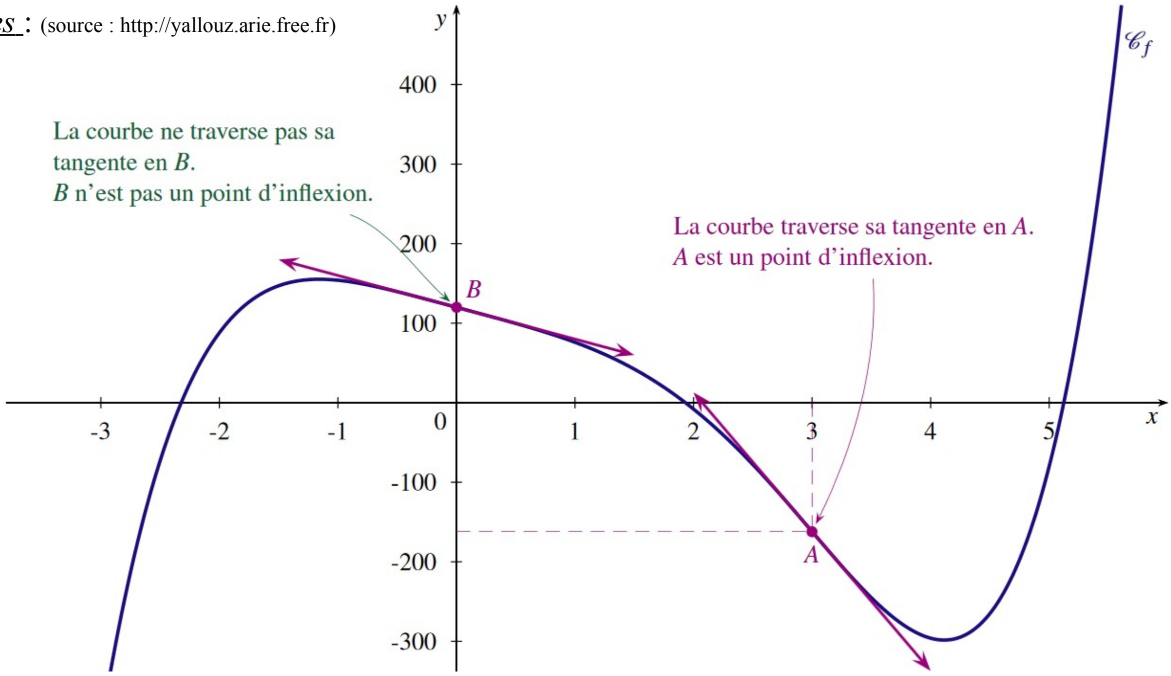
C O R O L L A I R E S .
- f est convexe si, et seulement si, sa fonction dérivée seconde f'' est positive sur I.
- f est concave si, et seulement si, sa fonction dérivée seconde f'' est négative sur I.

Exemple : étudier la convexité de la fonction polynomiale f définie par $f(x)=x^5-5x^4$.

IV. Point d'inflexion

DÉFINITION.
S'il existe un point A de la courbe représentative de f tel que la tangente à la courbe en A « traverse » la courbe en A, on dit que A est un ***point d'inflexion***.
Plus précisément, un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité.

Exemples : (source : http://yallouz.arie.free.fr)



CONSÉQUENCES.
• Si f' change de sens de variation en a, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.
• Si f'' s'annule et change de signe en a, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

La courbe ci-dessus est celle de la fonction polynomiale f définie par $f(x)=x^5-5x^4-40x+120$.
Démontrer que sa courbe admet un unique point d'inflexion.

V. Complément : les courbes monstres

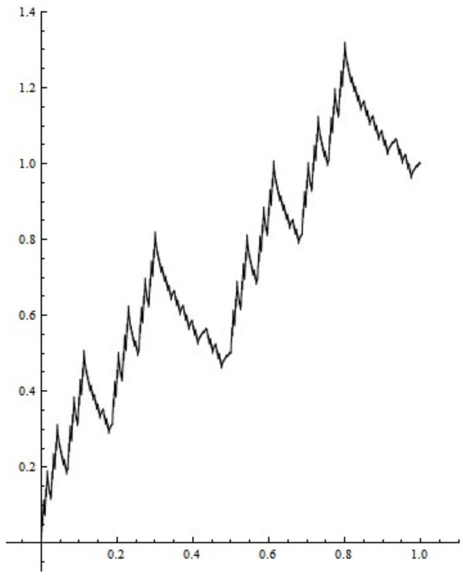
Il existe des **fonctions continues partout, mais dérivable nulle part**… Si si !

Elles sont apparues au XIXe siècle, et ont été loin de laisser indifférent : Poincaré les a qualifiées de "monstres" et Charles Hermite écrira en 1893 :

« Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées ».

On les appelle plus affectueusement "pathologiques"…

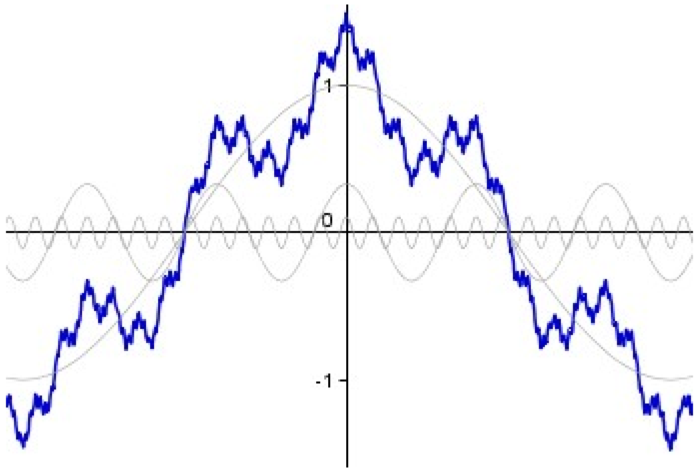
La toute première fonction de ce type est l'œuvre du mathématicien tchèque Bernard Bolzano, découverte en 1830. Il faudra tout de même attendre 1930 avant qu'elle ne soit publiée. Par sa construction, on peut l'identifier comme étant la première fractale de l'histoire !



Le 18 juillet 1872, le mathématicien Karl Weierstrass présente devant une foule médusée non pas une, toute une famille entière de fonctions continues dérivables nulle part ! Il en existait bien deux autres alors, mais n'étaient pas publiées (celle de Bolzano et celle de Cellérier, qui est un cas particulier de celle de Weierstrass).
Les courbes de Weierstrass sont données par la formule suivante :

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$$

Autrement dit, une somme de fonctions cosinus (toutes aussi continues et dérivables les unes que les autres, mais de plus en plus sinueuses et tassées), ce qui donne :

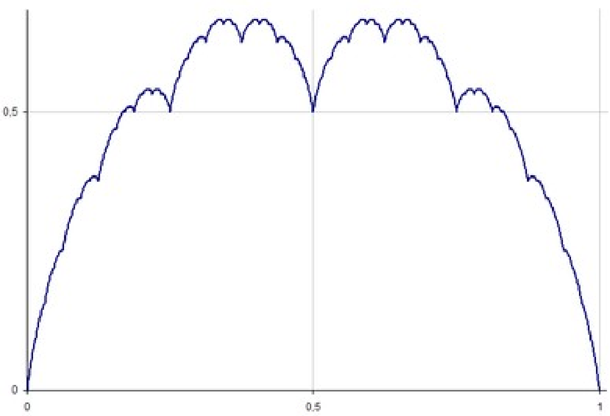


En gris les sinusoïdes à sommer pour obtenir la fonction

Bref :

dérivable + dérivable + dérivable + …
=
non dérivable !

Une petite dernière, datant de 1903 : la courbe de Tagaki, alias courbe du blanc-manger (parce qu'elle ressemblerait au blanc-manger, un pouding au lait d'amande. On y ajoute de la noix de coco, de l'abricot ou des fruits rouges, selon les préférences culinaires).



Source (à lire) :
http://eljjdx.canalblog.com/archives/2009/06/28/14224286.html