SUITES
EXERCICES DE BAC ES

EXERCICE 1 *Amérique du Nord 2015 (3)*

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

PARTIE A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15 % chaque année.
Au 1^er^ janvier 2004, la population était estimée à 25 000 singes.
À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1^er^ janvier de chaque année. Pour tout entier naturel n, le terme u_n de la suite représente le nombre de singes au 1^er^ janvier de l'année $2004+n$. On a ainsi $u_0 = 25000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes :
   a) au 1^er^ janvier 2005 ;
   b) au 1^er^ janvier 2006, en arrondissant à l'entier.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25000 \times 0{,}85^n$.
3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1^er^ janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.
   Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1 :	Variables	u un réel, n un entier
L2 :	Initialisation	u prend la valeur 25 000
L3 :		n prend la valeur 0
L4 :	Traitement	Tant que .... faire
L5 :		u prend la valeur ....
L6 :		n prend la valeur ....
L7 :		Fin Tant que
L8 :	Sortie	Afficher n

4. Montrer que la valeur n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

PARTIE B

Au 1^er^ janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus. La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.
On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme v_n de la suite représente le nombre de singes au 1^er^ janvier de l'année $2014+n$. On a ainsi $v_0 = 5000$.

1. a) Calculer v_1 et v_2.
   b) justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}75 \times v_n + 400$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 1600$.
   a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75. Préciser la valeur de w_0.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $v_n = 1600 + 3400 \times 0{,}75^n$.
   d) Calculer la limite de la suite (v_n) et interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 *Amérique du Sud 2015 (3 obligatoire)*

Claudine est une passionnée de lecture abonnée à l'hebdomadaire littéraire « La Lecture ». Elle se rend une fois par semaine à la bibliothèque et elle demande ou non l'avis du bibliothécaire sur le livre mis en valeur dans l'hebdomadaire « La Lecture ».
Son souhait de demander un avis change d'une semaine sur l'autre selon le plaisir qu'elle a eu à lire le livre et selon la pertinence du conseil donné par le bibliothécaire la semaine précédente.
La première semaine, on suppose que la probabilité que Claudine demande un avis vaut 0,1.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note a_n la probabilité que Claudine demande un avis la n-ième semaine. On a ainsi $a_1 = 0{,}1$.
On admet que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}4$.

1. Calculer la probabilité a_2 que Claudine demande un avis la deuxième semaine.
2. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on définit la suite (v_n) par : $v_n = a_n - 0{,}8$.

   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5. Préciser son premier terme v_1.
   b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on a : $a_n = 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}5^{n-1}$.
   c) Déterminer la limite de la suite (v_n).
   d) En déduire la limite de la suite (a_n). Interpréter ce résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :	A est un réel N est un entier naturel L est un réel strictement compris entre 0,1 et 0,8
INITIALISATION :	A prend la valeur 0,1 N prend la valeur 1

TRAITEMENT :	Tant que $A \leqslant L$
	  N prend la valeur $N + 1$
	  A prend la valeur $0{,}5 \times A + 0{,}4$
	Fin du Tant que

SORTIE :	Afficher N

   a) Pour la valeur $L = 0{,}7$, recopier et compléter autant que nécessaire les colonnes du tableau suivant :

Valeur de N	1	2	...	
Valeur de A	0,1		...	
Condition $A \leqslant L$	vraie		...	

   b) En déduire l'affichage de N obtenu en sortie d'algorithme quand la valeur de L est 0,7.
   c) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment on peut interpréter le nombre N obtenu en sortie de l'algorithme quand le nombre L est compris strictement entre 0,1 et 0,8.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer le nombre de semaines à partir duquel la probabilité que Claudine demande un avis soit supérieure à 0,799.

EXERCICE 3 *Antilles Guyane 2015 (3)*

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. a) On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

```
VARIABLES :     k, NbClients
TRAITEMENT :    Affecter à k la valeur 0
                Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
                Tant que k < 8
                  | Affecter à k la valeur k + 1
                  | Affecter à NbClients la valeur 0,9 × NbClients + 60000
                  | Afficher NbClients
                Fin Tant que
```

   b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour k de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients						

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} U_0 & = & 1\,000 \\ U_{n+1} & = & 0{,}9U_n + 60. \end{cases}$$

   Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010 + n$.

   Pour étudier la suite (U_n), on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$.

   a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9.

   b) Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.

   c) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $U_n = 400 \times 0{,}9^n + 600$.

   d) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Interpréter le résultat dans le contexte de ce problème.

3. À la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients.

   Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8 % de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients.

   On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.

   En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années, déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.

EXERCICE 4 *Antilles Guyane septembre 2015 (3)*

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Son objectif est de constituer un capital de 18 000 euros.
Le couple a placé le montant de 1 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2010 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 2 400 euros.

1. Déterminer le capital présent sur le compte le 1er janvier 2011 après le versement annuel.
2. On veut déterminer la somme présente sur le compte après un certain nombre d'années.
   On donne ci-dessous trois algorithmes :

algorithme 1

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
Saisir une valeur pour N
Début traitement
Affecter 1 000 à U
Pour i de 1 à N faire
    Affecter 1,02 × U + 2400 à U
Fin pour
Afficher U
Fin traitement
```

algorithme 2

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
Saisir une valeur pour N
Début traitement
Pour i de 1 à N faire
    Affecter 1 000 à U
    Affecter 1,02 × U + 2400 à U
Fin pour
Afficher U
Fin traitement
```

algorithme 3

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
Saisir une valeur pour N
Début traitement
Affecter 1 000 à U
Pour i de 1 à N faire
    Affecter 1,02 × U + 2400 à U
    Affecter N + 1 à N
Fin pour
Afficher U
Fin traitement
```

   a) Pour la valeur 5 de N saisie dans l'algorithme 1, recopier puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous (arrondir les valeurs calculées au centième).

valeur de i	xxx	1	...
valeur de U	1 000		...

   b) Pour la valeur 5 de N saisie, quel affichage obtient-on en sortie de cet algorithme ?
   Comment s'interprète cet affichage ?

   c) En quoi les algorithmes 2 et 3 ne fournissent pas la réponse attendue ?

3. À partir de la naissance de son premier enfant en 2016, le couple décide de ne pas effectuer le versement du premier janvier 2017 et de cesser les versements annuels tout en laissant le capital sur ce compte rémunéré à 2 %.
   Au premier janvier de quelle année l'objectif de 18 000 euros est-il atteint ?

EXERCICE 5 *Asie 2015 (2 obligatoire)*

Valentine place un capital c_0 dans une banque le 1er janvier 2014 au taux annuel de 2 %. À la fin de chaque année les intérêts sont ajoutés au capital, mais les frais de gestion s'élèvent à 25 € par an.
On note c_n la valeur du capital au 1er janvier de l'année $2014+n$.

PARTIE A

On considère l'algorithme ci-dessous :

```
INITIALISATION
Affecter à N la valeur 0
TRAITEMENT
Saisir une valeur pour C
   Tant que C < 2000 faire
      Affecter à N la valeur N + 1
      Affecter à C la valeur 1,02C − 25
   Fin Tant que
SORTIE
Afficher N
```

1. a) On saisit la valeur 1 900 pour C. Pour cette valeur de C, recopier le tableau ci-dessous et le compléter, en suivant pas à pas l'algorithme précédent et en ajoutant autant de colonnes que nécessaire.

Valeur de N	0		
Valeur de C	1 900		

   b) Quel est le résultat affiché par l'algorithme ? Dans le contexte de l'exercice, interpréter ce résultat.
2. Que se passerait-il si on affectait la valeur 1 250 à C ?

PARTIE B

Valentine a placé 1 900 € à la banque au 1er janvier 2014. On a donc $c_0 = 1900$.

1. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_{n+1} = 1{,}02c_n - 25$.
2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = c_n - 1250$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Soit n un nombre entier naturel ; exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a : $c_n = 650 \times 1{,}02^n + 1250$.
3. Montrer que la suite (c_n) est croissante.
4. Déterminer, par la méthode de votre choix, le nombre d'années nécessaires pour que la valeur du capital dépasse 2 100 €.

EXERCICE 6 *Centres étrangers 2015 (2 obligatoire)*

Depuis le 1[er] janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.
La commune disposait de 200 vélos au 1[er] janvier 2015.
La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.
On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1[er] janvier de l'année $2015+n$.

1. Déterminer le nombre de vélos au 1[er] janvier 2016.
2. Justifier que la suite(u_n) est définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 42$.
3. On donne l'algorithme suivant :

VARIABLES :	N entier
	U réel
INITIALISATION :	N prend la valeur 0
	U prend la valeur 200
TRAITEMENT :	Tant que $N < 4$
	U prend la valeur $0{,}85 \times U + 42$
	N prend la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
SORTIE :	Afficher U

   a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

U	200				
N	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai				

   b) Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 280$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = -80$.
   b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = -80 \times 0{,}85^n + 280$.
   d) Calculer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat.
5. La société Bicycl'Aime facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1[er] janvier.
   Déterminer le coût total pour la période du 1[er] janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite (u_n) étant exprimé avec un nombre entier.

EXERCICE 7 *France métropolitaine, La Réunion 2015 (2 obligatoire)*

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuse plusieurs puits suffisamment profonds.
Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = 2000 \times 1{,}008^{n-1}$ où u_n représente le coût en euros du forage de la n-ième dizaine de mètres.
On a ainsi $u_1 = 2000$ et $u_2 = 2016$, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2 000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2 016 euros.
Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.
2. Pour tout entier naturel n non nul :
   a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).
   b) En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$-ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n-ième dizaine de mètres.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
INITIALISATION
u prend la valeur 2 000
S prend la valeur 2 000
TRAITEMENT
Saisir n
Pour i allant de 2 à n
   u prend la valeur u × 1,008
   S prend la valeur S + u
Fin Pour
SORTIE
Afficher S
```

   La valeur de n saisie est 5.

   a) Faire fonctionner l'algorithme précédent pour cette valeur de n.
   Résumer les résultats obtenus à chaque étape dans le tableau ci-dessous (à recopier sur la copie et à compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire).

Valeur de i		2	
Valeur de u	2 000		
Valeur de S	2 000		

   b) Quelle est la valeur de S affichée en sortie ? Interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.
4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n), n étant un entier naturel non nul. On admet que :
$$S_n = -250000 + 250000 \times 1{,}008^n.$$
   Le budget consenti pour le forage du premier puits est de 125 000 euros. On souhaite déterminer la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget.

   a) Calculer la profondeur maximale par la méthode de votre choix (utilisation de la calculatrice, résolution d'une inéquation …).
   b) Modifier l'algorithme précédent afin qu'il permette de répondre au problème posé.

EXERCICE 8 *France Métropolitaine, La Réunion septembre 2015 (3 obligatoire)*

Dans une ville, un opéra décide de proposer à partir de 2014 un abonnement annuel pour ses spectacles.
L'évolution du nombre d'abonnés d'une année à la suivante est modélisée par le directeur de l'opéra qui prévoit que 75 % des personnes abonnées renouvelleront leur abonnement l'année suivante et qu'il y aura chaque année 300 nouveaux abonnés.
Ainsi, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'abonnés pour l'année $(2014+n)$.
Pour l'année 2014, il y a 500 abonnés, autrement dit $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2. Arrondir à l'entier.
2. Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 300$.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1\,200$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,75 et préciser v_0.
   b) En déduire alors que pour tout entier naturel n, $u_n = -700 \times 0{,}75^n + 1\,200$.
   c) Calculer u_{10} (arrondir à l'entier). Donner une interprétation concrète de la valeur trouvée.
4. On souhaite écrire un algorithme qui permette d'afficher l'année à partir de laquelle le nombre d'abonnements sera supérieur à 1 190.
   On propose trois algorithmes :

Algorithme 1
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leqslant 1\,190$
    Affecter à n la valeur $n+1$
    Affecter à U la valeur $-700 \times 0{,}75^n + 1\,200$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n+2014$
Afficher n

Algorithme 2
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leqslant 1\,190$
    Affecter à U la valeur $-700 \times 0{,}75^n + 1\,200$
    Affecter à n la valeur $n+1$
Fin Tant que
Affecter à n la valeur $n+2014$
Afficher n

Algorithme 3
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 500
Tant que $U \leqslant 1\,190$
    Affecter à n la valeur $n+1$
    Affecter à U la valeur $-700 \times 0{,}75^n + 1\,200$
    Affecter à n la valeur $n+2014$
Fin Tant que
Afficher n

Parmi ces trois algorithmes, déterminer lequel convient pour répondre au problème posé et expliquer pourquoi les deux autres ne conviennent pas.

EXERCICE 9

Liban 2015 (4 obligatoire)

Une retenue d'eau artificielle contient 100 000 m^3 d'eau le 1er juillet 2013 au matin.
La chaleur provoque dans la retenue une évaporation de 4 % du volume total de l'eau par jour. De plus, chaque soir, on doit libérer de la retenue 500 m^3 pour l'irrigation des cultures aux alentours.
Cette situation peut être modélisée par une suite (V_n).
Le premier juillet 2013 au matin, le volume d'eau en m^3 est $V_0 = 100000$.
Pour tout entier naturel n supérieur à 0, V_n désigne le volume d'eau en m^3 au matin du n-ième jour qui suit le 1er juillet 2013.

1. a) Justifier que le volume d'eau V_1 au matin du 2 juillet 2013 est égal à 95 500 m^3.
   b) Déterminer le volume d'eau V_2, au matin du 3 juillet 2013.
   c) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = 0{,}96V_n - 500$.
2. Pour déterminer à quelle date la retenue ne contiendra plus d'eau, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous.
   Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	VARIABLES :	V est un nombre réel
L2		N est un entier naturel
L3	TRAITEMENT :	Affecter à V la valeur 100 000
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $V > 0$
L6		Affecter à N la valeur ...
L7		Affecter à V la valeur ...
L8		Fin Tant que
L9	SORTIE :	Afficher ...

3. On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = V_n + 12500$.
   a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison 0,96. Préciser son premier terme.
   b) Exprimer U_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = 112500 \times 0{,}96^n - 12500$.
4. a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $112500 \times 0{,}96^n - 12500 \leqslant 0$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

EXERCICE 10 *Nouvelle Calédonie 2015 (2 obligatoire)*

Dans une ville, un service périscolaire comptabilise 150 élèves inscrits en septembre 2014.
On admet que, chaque année, 80 % des élèves inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 40 nouveaux élèves inscrits. La capacité d'accueil du périscolaire est de 190 élèves maximum.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au périscolaire en septembre de l'année $2014+n$, avec n un nombre entier naturel.
On a donc $u_0 = 150$.

1. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au périscolaire en septembre 2015.
2. Pour tout entier naturel n, justifier que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 40$.
3. On donne l'algorithme suivant :

```
INITIALISATION
Affecter à n la valeur 0
Affecter à U la valeur 150
TRAITEMENT
Tant que U ⩽ 190
    n prend la valeur n + 1
    U prend la valeur 0,8U + 40
Fin tant que
SORTIE
Afficher le nombre 2014 + n
```

   a) Recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au centième.

Valeur de n	0	1	2	
Valeur de U	150			
Condition $U \leqslant 190$	vraie			

   b) En déduire l'affichage obtenu en sortie de l'algorithme et interpréter ce résultat.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Pour tout entier naturel n, démontrer que $u_n = 200 - 50 \times 0{,}8^n$.
   c) Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que :
   $$200 - 50 \times 0{,}8^n > 190.$$
   d) À partir de quelle année la directrice du périscolaire sera-t-elle obligée de refuser des inscriptions faute de places disponibles ?

EXERCICE 11 *Nouvelle Calédonie mars 2016 (2 obligatoire)*

Un club de basketball a suivi sur plusieurs années l'évolution des abonnements annuels de ses supporters. Partant de ces observations, on décide de modéliser le nombre annuel d'abonnés sur la base d'un taux de réabonnement de 80 % d'une année sur l'autre auxquels s'ajoutent 300 nouveaux abonnements.
On se propose d'étudier l'évolution du nombre annuel des abonnés du club de basketball à l'aide de ce modèle.
Le nombre d'abonnés au club à la fin de l'année 2014 était 1 128.
On note a_n, le nombre d'abonnés à la fin de l'année $2014+n$. On a donc $a_0 = 1\,128$.

1. Estimer le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2015.
2. Expliquer pourquoi, pour tout nombre entier naturel n, on a $a_{n+1} = 0{,}8a_n + 300$.
3. Soit (u_n) la suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 1\,500 - a_n$.
   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer u_n en fonction de n.
   c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a $a_n = 1\,500 - 372 \times 0{,}8^n$.
4. Résoudre algébriquement l'inéquation $a_n > 1\,450$ et interpréter le résultat obtenu.
5. La municipalité dont dépend le club de basketball prévoit de construire une nouvelle salle de sport pour accueillir les rencontres du club.

   On souhaite pouvoir accueillir tous les abonnés du club auxquels s'ajouteraient 500 spectateurs occasionnels non abonnés au club.

   En tenant compte des résultats précédents, combien de places de spectateurs au minimum doit-on prévoir dans cette salle ?

EXERCICE 12 *Polynésie 2015 (3)*

Les techniciens d'un aquarium souhaitent régler le distributeur automatique d'un produit visant à améliorer la qualité de l'eau dans un bassin. La concentration recommandée du produit, exprimée en mg.l^{-1} (milligramme par litre), doit être comprise entre 140 mg.l^{-1} et 180 mg.l^{-1}.
Au début du test, la concentration du produit dans ce bassin est de 160 mg.l^{-1}.
On estime que la concentration du produit baisse d'environ 10 % par semaine.
Afin de respecter les recommandations portant sur la concentration du produit, les techniciens envisagent de régler le distributeur automatique de telle sorte qu'il déverse chaque semaine une certaine quantité de produit.
Les techniciens cherchent à déterminer cette quantité de façon à ce que :

— la concentration du produit soit conforme aux recommandations sans intervention de leur part, pendant une durée de 6 semaines au moins ;

— la quantité de produit consommée soit minimale.

PARTIE A

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 10 mg.l^{-1}.
On s'intéresse à l'évolution de la concentration chaque semaine. La situation peut être modélisée par une suite (C_n), le terme C_n en donnant une estimation de la concentration du produit, en mg.l^{-1}, au début de la n-ième semaine. On a $C_0 = 160$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 0{,}9 \times C_n + 10$.
2. Soit la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par : $V_n = C_n - 100$.
   a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et que $V_0 = 60$.
   b) Exprimer V_n en fonction de n.
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $C_n = 0{,}9^n \times 60 + 100$.
3. a) Déterminer la limite de la suite (C_n) quand n tend vers l'infini. Justifier la réponse.
   Interpréter le résultat au regard de la situation étudiée.
   b) Au bout de combien de semaines la concentration devient-elle inférieure à 140 mg.l^{-1} ?
4. Le réglage envisagé du distributeur répond-il aux attentes ?

PARTIE B

Dans cette partie, on suppose que la quantité de produit déversée chaque semaine par le distributeur automatique est telle que la concentration augmente de 12 mg.l^{-1}.
Que penser de ce réglage au regard des deux conditions fixées par les techniciens ?